This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

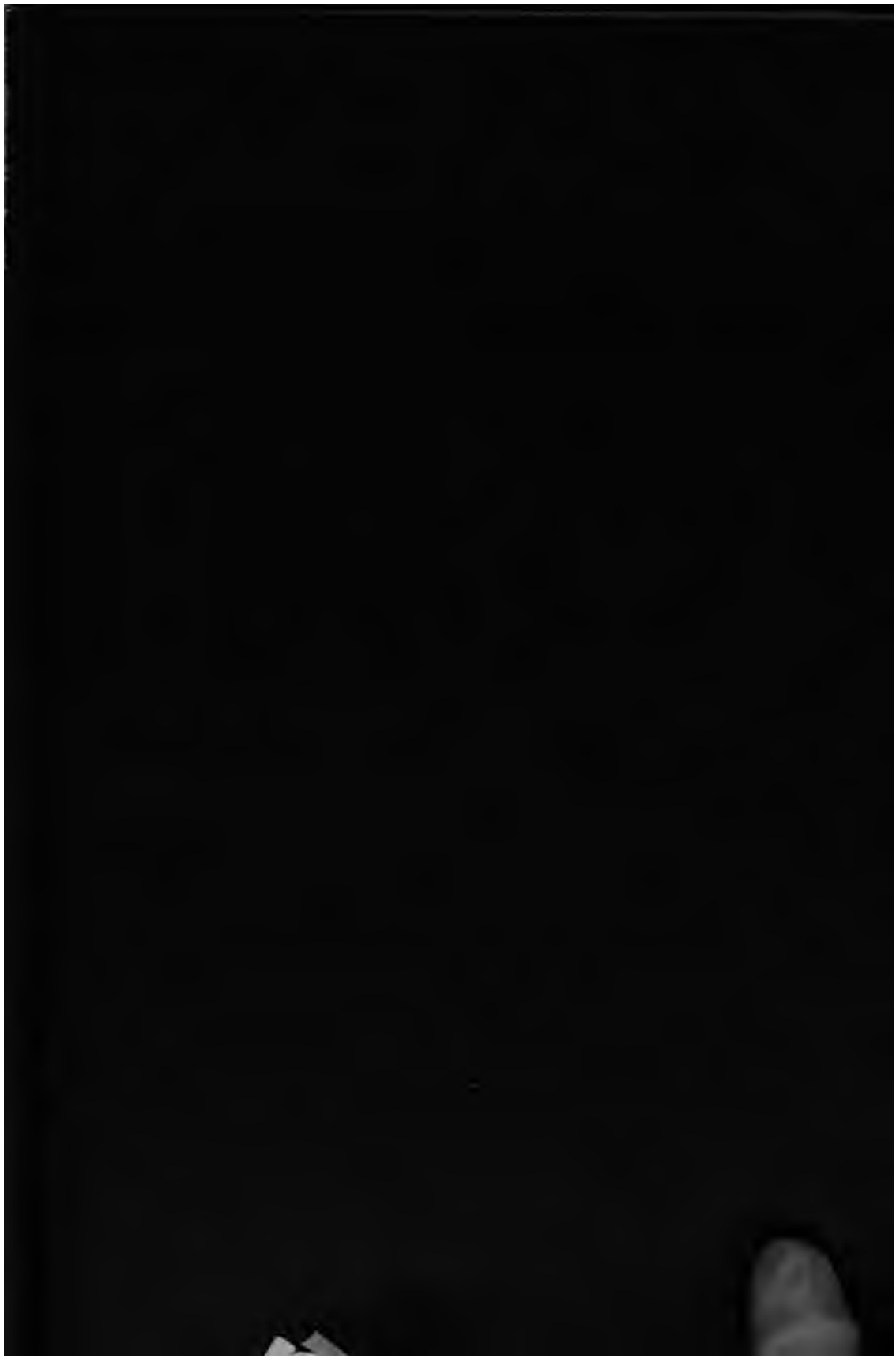
**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910093 5

# R. Lauenstein,

# Die Festigkeitslehre.



1. Strains and stresses

$s\vec{n}$

Empfehlenswerte Werke

aus dem Gebiete der

# TECHNOLOGIE (GEWERBEKUNDE) INGENIEUR-WISSENSCHAFTEN

und verwandter Disziplinen.

**Arnold Bergsträsser Verlagsbuchhandlung (A. Kröner) in Stuttgart.**

**Autenheimer,** Friedrich, **Aufgaben über mechanische Arbeit,** für Gewerbeschulen und angehende Techniker elementar bearbeitet. Mit 26 Abbildungen im Text. Preis geheftet 1 M. 25 Pf.

**Bach,** C. v., **Die Maschinen-Elemente.** Ihre Berechnung und Konstruktion mit Rücksicht auf die neueren Versuche. 7. vermehrte Auflage. 2 Bände. Mit in den Text gedruckten Abbildungen, 3 Texttafeln und 54 Tafeln Zeichnungen. Preis geheftet 30 Mark. In Halbfranz gebunden 35 Mark.

—„— **Abhandlungen und Berichte.** Mit zahlreichen Abbildungen im Text und 14 Tafeln. Preis kartoniert 36 Mark.

—„— **Die Construktion der Feuerspritzen.** Mit einem Anhange: Die allgemeinen Grundlagen für die Construktion der Kolbenpumpen. Mit 94 Abbildungen im Text u. 36 Tafeln Zeichnungen. Preis geh. 16 Mark.

**Bauernfeind,** Dr. Carl Max von, **Elemente der Vermessungskunde.** Ein Lehrbuch der praktischen Geometrie. Mit 30 Zahlentafeln und zahlreichen Abbildungen im Text. 7. Auflage. 2 Bände. Preis geh. 32 Mark. In Leinwand gebunden 36 Mark.

**Bernoullis Vademecum des Mechanikers** oder Praktisches Handbuch für Mechaniker, Techniker, Gewerbsleute und technische Lehranstalten. 22. Auflage, bearbeitet von Heinrich Berg. Mit zahlreichen Abbildungen im Text. In Leinwand gebunden Preis 6 Mark.

—„— **Dampfmaschinenlehre.** Handbuch zum Gebrauche in der Praxis und zum Selbstunterricht für angehende Ingenieure, sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten. 8. Auflage. Neu bearbeitet und vermehrt von Fr. Freytag. Mit 396 Abbildungen im Text und 7 Tafeln. Preis geheftet 14 Mark. In Leinwand gebunden 15 Mark.

**Braulik,** Aug., **Altägyptische Gewebe.** Unter Zugrundelegung einer reichhaltigen Sammlung fachlich untersucht und besprochen. Mit 126 Originalabbildungen im Text. Preis geheftet 4 Mark.

**Brown,** Henry T., **507 Bewegungsmechanismen,** enthaltend die wichtigsten in der Dynamik, Hydraulik, Hydrostatik, Pneumatik, Dampfmaschinenlehre, dem Mühlenbau, den Pressen, der Uhrmacherkunst und verschiedenen anderen Maschinen vorkommenden Mechanismen. Uebersetzt durch O. v. Pelser-Berensberg. In Leinwand gebunden 3 Mark.

**Brüggemann,** Heinrich, **Theorie und Praxis der rationellen Spinnerei.** I. Die nötigen Eigenschaften der Gespinste und deren Prüfung. Mit einem Atlas von 7 Tafeln. Preis geheftet 7 Mark.

II. Allgemeines über Fasernbearbeitung und eingehendes Studium des zur Spinnerei nötigen Streckens der Fasermassen. Mit einem Atlas von 24 Tafeln. Preis geheftet 15 Mark.

**Bujard,** Dr. Alfons, **Leitfaden der Pyrotechnik.** Einführung in die Chemie der wichtigsten Rohmaterialien und Sprengstoffe der Kunstfeuerwerkerei nebst Besprechung der einschlägigen Polizei- und Eisenbahnverkehrsverordnungen. Mit in den Text gedruckten Abbildungen. Preis geheftet 6 Mark. In Leinwand gebunden 7 Mark.

**Cremona,** L., **Elemente der projektivischen Geometrie.** Unter Mitwirkung des Verfassers übertragen von Fr. R. Trautvetter. Mit 214 Figuren im Text. Preis geheftet 5 Mark.

**Fischer,** Dr. Ferd., **Taschenbuch für Feuerungstechniker.** Anleitung zur Untersuchung und Beurteilung von Feuerungsanlagen und Brennstoffen. 3. Aufl. Mit zahlreichen Abbildungen im Text. In Leinwand geb. Preis 3 Mark.

**Gentsch,** Wilhelm, **Gasglühlicht.** Dessen Geschichte, Wesen und Wirkung. Für Erfinder, Fabrikanten und Konsumenten bearbeitet. Mit 68 Abbildungen im Text. Preis geheftet 2 M. 40 Pf.

—„— **Sicherheits- und Rettungswesen auf See.** Mit einem Anhang: Gesetzliche Bestimmungen. Mit 253 Abbildungen im Text. Preis geh. 6 M.

**Heinzerling,** Dr. Chr., **Schlagwetter und Sicherheitslampen.** Entstehung und Erkennung der schlagenden Wetter und Konstruktion der wichtigeren Typen der Sicherheitslampen. Mit 119 Abbildungen im Text. Preis geheftet 8 Mark.

**Hentschel,** Fr. M., **Praktisches Lehrbuch der Kammgarnspinnerei** zum Selbstunterricht für Spinnereitechniker, Werkführer und vorwärtsstrebende Arbeiter. 2. Auflage. Mit 96 Abbildungen im Text und vielen Tabellen. Preis geheftet 7 Mark. In Leinwand gebunden 8 Mark.

**Hering,** C. A., **Die Verdichtung des Hüttenrauchs.** Eine gedrängte Uebersicht über alle bekannt gewordenen Vorrichtungen und Verfahren zum Auffangen des Flugstaubes und zur Beseitigung des schädlichen Einflusses desselben, sowie der sauren Gase, welche im Hüttenrauche enthalten sind. Mit 86 Figuren auf 13 Tafeln. Preis geheftet 5 Mark.

**Lauenstein,** R., **Die Festigkeitslehre.** Elementares Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht, sowie zum Gebrauch in der Praxis, nebst einem Anhang, enthaltend Tabellen der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte. 6. Aufl. Mit 116 Abbildungen im Text. Preis geh. 4 M. 40 Pf. In Leinwand gebunden 5 Mark.

—„— **Die graphische Statik.** Elementares Lehrbuch für technische Unterrichtsanstalten und zum Gebrauch in der Praxis. 6. Auflage. Mit 285 Abbildungen im Text. Preis geheftet 5 M. 40 Pf. In Leinwand gebunden 6 Mark.

—„— **Die Mechanik.** Elementares Lehrbuch für technische Mittelschulen und zum Selbstunterricht. 4. Auflage. Mit 210 Abbildungen im Text. Preis geheftet 4 M. 40 Pf. In Leinwand gebunden 5 Mark.

—„— **Die Eisenkonstruktionen des einfachen Hochbaues.** Zum Gebrauch für Schule und Praxis bearbeitet unter Mitwirkung von A. Hanser.

Fortsetzung siehe S. 180.

Die

# Festigkeitslehre.

## Elementares Lehrbuch

für den Schul- und Selbstunterricht sowie zum Gebrauch in der Praxis

nebst einem Anhang enthaltend

Tabellen der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte

bearbeitet von

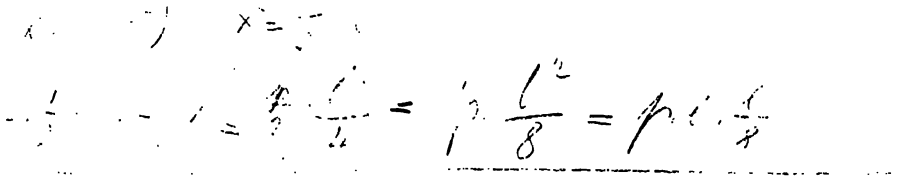
**R. Lauenstein,**
Ingenieur und Professor an der Baugewerkeschule in Karlsruhe.

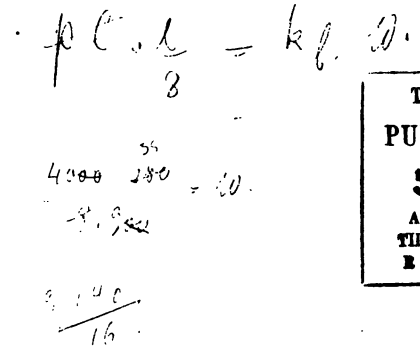
**Sechste Auflage.**

---

Mit 116 Abbildungen im Text.

**Stuttgart 1901.**
Arnold Bergsträßer Verlagsbuchhandlung
A. Kröner.





THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
515781B
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1949 L

Alle Rechte vorbehalten.

Druck der Union Deutsche Verlagsgesellschaft in Stuttgart.

# Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch ist zunächst für den Unterricht an technischen Mittelschulen bestimmt; daneben soll es zum Selbststudium sowie zum Gebrauche in der Praxis dienen.

Bei dem Zwecke, den das Lehrbuch verfolgt, mußte ich mich darauf beschränken, die bekannten Lehren der Festigkeitslehre in möglichst übersichtlicher und leicht faßlicher Form zu geben.

Die mathematischen Kenntnisse, welche vorausgesetzt werden, sind nicht sehr bedeutend und gehen nicht über das Maß dessen, was auf guten Baugewerkeschulen gelehrt wird, hinaus. Es ließ sich dabei nicht vermeiden, daß an einzelnen Stellen auf eine streng wissenschaftliche Durchführung verzichtet werden mußte (wie z. B. bei der Theorie des Zerknickens, wo als Biegungskurve statt der Sinuslinie die Parabel angenommen wurde); außerdem sind einige Formeln, die sich nur mit Hilfe der höheren Mathematik ableiten lassen, lediglich als Resultate gegeben, so z. B. die Gleichung 107) S. 138 und die Gleichungen 112) und 113) S. 140. (Die Ableitung dieser Gleichungen kann übrigens in den dort angeführten Quellen nachgesehen werden.)

Die beigefügten Aufgaben nebst ihren Lösungen, deren Zahl durch den Lehrer noch beliebig vermehrt werden kann, sollen dazu dienen, die Anwendung der entwickelten Gleichungen gehörig zu üben, und ich halte eine derartige Uebung bei den Schülern für durchaus wichtig.

Die Inanspruchnahme des Schmiedeeisens für ruhig und stetig belastete Hochbaukonstruktionen, die bislang auf Grund alter Bestimmungen ziemlich allgemein noch zu 750 kg/qcm angenommen wurde, ist unter Berücksichtigung der bedeutenden Fortschritte, welche das Eisenhüttenwesen in den letzten Jahren gemacht hat, nicht mehr aufrecht zu erhalten. Ich habe deshalb

49X946

den Vorschlägen von Heinzerling und Intze und auch dem Vorgehen von Scharowsky und anderer namhafter Ingenieure folgend die Inanspruchnahme des Schmiedeeisens zu 1000 kg/qcm angenommen.

Die freundliche Aufnahme, welche das Buch bisher gefunden, läßt mich hoffen, daß dasselbe sich auch fernerhin Freunde erwerben wird. Die Vorschläge der Herren Fachgenossen zur Verbesserung und Vervollkommnung des Buches werde ich, wie immer, dankbar entgegennehmen und etwaige Wünsche bezüglich der Behandlung und der Auswahl des Stoffes nach Möglichkeit berücksichtigen.

Karlsruhe, September 1900.

R. Tauenstein.

# Inhalt.


| | | Seite |
|---|---|---|
| § 1. | Vorbemerkungen | 1 |
| § 2. | Widerstand gegen Zug und Druck | 6 |
| § 3. | Flächenmomente und Säulenmomente | 12 |
| § 4. | Widerstand gegen Biegung | 14 |
| § 5. | Trägheitsmomente und Widerstandsmomente | 18 |
| § 6. | Tabellen der Trägheitsmomente und Widerstandsmomente verschiedener Profile | 28 |
| § 7. | Die Krümmung und Durchbiegung der belasteten Balken | 42 |
| § 8. | Der an einem Ende eingespannte Träger | 44 |
| | 1. Belastung durch Einzelkräfte | 44 |
| | 2. Streckenbelastung | 47 |
| | 3. Zusammengesetzte Belastung | 50 |
| § 9. | Der Träger auf zwei Stützen | 57 |
| | 1. Belastung durch Einzelkräfte | 57 |
| | 2. Streckenbelastung | 66 |
| | 3. Zusammengesetzte Belastung | 77 |
| § 10. | Die statisch unbestimmten Träger | 89 |
| | 1. Der gleichmäßig belastete Träger auf drei Stützen | 89 |
| | 2. Der durch Einzelkräfte belastete Träger auf drei Stützen | 91 |
| | 3. Der an einem Ende wagerecht eingespannte, am anderen Ende frei aufliegende Träger | 93 |
| | 4. Der an beiden Enden wagerecht eingespannte, gleichmäßig belastete Träger | 95 |
| | 5. Der an beiden Enden wagerecht eingespannte, in der Mitte durch eine Einzelkraft P belastete Träger | 96 |
| § 11. | Die Träger von gleichem Biegungswiderstand | 99 |
| § 12. | Die auf Doppelbiegung beanspruchten Träger | 106 |
| § 13. | Widerstand gegen Abscherung | 110 |

Seite

§ 14. Widerstand gegen Zerknicken . . . . . 114
Beispiel der Berechnung von Balken, Unterzügen und Säulen für ein einfaches zweistöckiges Gebäude . . . . . 124
§ 15. Widerstand gegen Verdrehung . . . . . 129
§ 16. Zusammengesetzte Widerstände . . . . . 135
1. Biegung und Zug oder Druck . . . . . 135
2. Biegung und Verdrehung . . . . . 137
§ 17. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln . . . . . 142

## Anhang.

1. Tabelle der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte der Zahlen 1,0 bis 100,0 . . . . . 149
2. Tabelle der Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen 100 bis 1000 . . . . 171

## § 1.

# Vorbemerkungen.

Wirken auf einen festen Körper irgend welche äußeren Kräfte, so tritt unter allen Umständen eine Formänderung des Körpers ein.

Wird z. B. ein am oberen Endpunkte befestigter gerader Stab durch ein unten angehängtes Gewicht belastet, so tritt stets eine Verlängerung des Stabes ein, wie groß auch immer die Festigkeit des Materials und wie klein auch immer das angehängte Gewicht sein möge.

Solange die Formänderungen eine gewisse Grenze, die sogen. **Elastizitätsgrenze**, nicht überschreiten, verschwinden dieselben wieder, sobald die äußeren Kräfte zu wirken aufhören, und der Körper nimmt seine ursprüngliche Form wieder an. Diese Eigenschaft der Körper nennt man **Elastizität**.

Vergrößert man die äußeren Kräfte so weit, daß die Elastizitätsgrenze überschritten wird, so verschwinden nach Aufhören der Kräfte die Formänderungen nicht mehr vollständig; es treten vielmehr **bleibende** Formänderungen ein, bis schließlich durch weitere Steigerung der äußeren Kräfte eine Zerstörung des Körpers erfolgt.

Den durch die äußeren Kräfte hervorgebrachten Formänderungen wirken nun innere Kräfte als Widerstände entgegen, welche abhängig sind von der Art und Weise, in welcher die äußeren Kräfte anf den Körper einwirken. Es lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

1) Die Kraft P wirkt in der Längsrichtung des Körpers und sucht denselben entweder auszudehnen (Fig. 1a) oder zusammenzudrücken (Fig. 1b). Bei dieser Kraftäußerung tritt der **Widerstand gegen Zug** bezw. **Druck** auf.

2) Die Kraft P wirkt unter einem Winkel (meist 90°) gegen die Längsrichtung des Körpers und sucht denselben durchzubiegen (Fig. 2). Hierbei entsteht der **Widerstand gegen Biegung**.

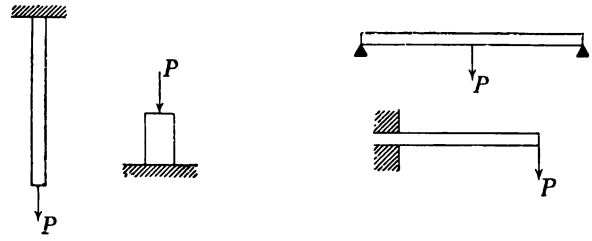
3) Die Kraft P sucht eine Trennung des Körpers in einer Fläche zu bewirken und erzeugt dabei den **Widerstand gegen Abscherung** (Fig. 3 u. 3a).

4) Die Kraft P wirkt in der Längsrichtung des Körpers, dessen Länge im Vergleich zu seinem Querschnitt so groß ist, daß ein seitliches Ausbiegen eher als

ein Zerdrücken eintritt (Fig. 4). Der hierbei auftretende Widerstand heißt der Widerstand gegen Zerknicken.

5) Die Kraft P strebt den Körper um seine Längsachse zu verdrehen und erzeugt dabei den Widerstand gegen Verdrehung (Fig. 5).

Fig. 1a. Fig. 1b. Fig. 2.




Die Widerstände können entweder einzeln oder auch gleichzeitig in einem Körper auftreten. So z. B. wird der Balken eines versteiften Trägers gleichzeitig

Fig. 3. Fig. 3a. Fig. 4.

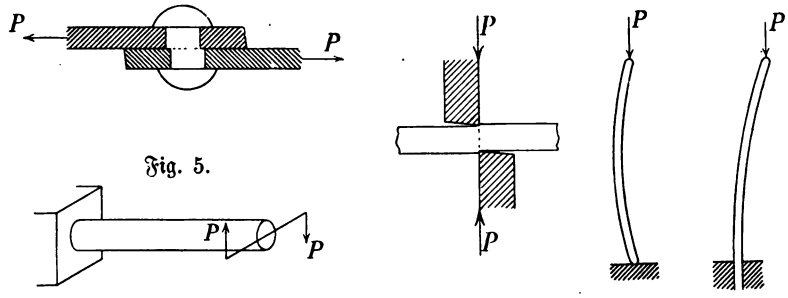



Fig. 5.




auf Biegung und auf Druck beansprucht, eine Welle gleichzeitig auf Biegung und auf Verdrehung.

Um nun die bei Einwirkung äußerer Kräfte auftretenden inneren Widerstände näher untersuchen zu können, bezieht man diese auf die Flächeneinheit und nennt den auf die Flächeneinheit wirkenden Widerstand: Spannung.

Es soll hier in der Folge

als Flächeneinheit das Quadratcentimeter,
als Krafteinheit das Kilogramm

zu Grunde gelegt werden.

Je nach der Größe der Spannung nennt man:

Tragfestigkeit diejenige Spannung, welche der Elastizitätsgrenze entspricht, bei welcher also ein Stab bis zur Elastizitätsgrenze ausgedehnt oder zusammengedrückt ist.

Bruchfestigkeit diejenige Spannung, bei welcher eine Zerstörung des Materials eintritt.

Ist bei einem Materiale die Bruchfestigkeit erheblich größer als die Tragfestigkeit, so nennt man das Material *zäh*; ist dagegen die Bruchfestigkeit nur wenig größer als die Tragfestigkeit, so ist das Material *spröde*.

*Elastizitätsmodul* kann man erklären als diejenige Spannung, bei welcher ein Stab um seine eigene Länge ausgedehnt oder zusammengedrückt würde, vorausgesetzt, daß die Elastizitätsgrenze dabei nicht überschritten würde und daß das Material eine solche Formänderung überhaupt zuließe.

Da bei Eintritt bleibender Formänderungen ein Körper seine ursprüngliche Beschaffenheit nicht mehr besitzt, vielmehr schon als teilweise zerstört angesehen werden kann, so darf bei statischen Konstruktionen die Elastizitätsgrenze niemals überschritten werden. Diejenige Spannung, welche bei Bauausführungen auf die Dauer und mit Sicherheit dem Materiale zugemutet werden kann, die *zulässige Spannung* oder *zulässige Inanspruchnahme*, muß daher immer kleiner als die Tragfestigkeit sein.

Das Verhältnis der zulässigen Inanspruchnahme zu der Bruchfestigkeit heißt der *Sicherheitsgrad*.

Gewöhnlich wird bei Eisenkonstruktionen für die zulässige Inanspruchnahme ein gewisser Teil der Tragfestigkeit, bei Steinkonstruktionen meistens ein gewisser Teil der Bruchfestigkeit angenommen.

Es sollen für die Folge nachstehende, ziemlich allgemein verbreitete Bezeichnungen benutzt werden.

$$k = \text{zulässige Inanspruchnahme},$$
$$K = \text{Bruchfestigkeit},$$
$$E = \text{Elastizitätsmodul}.$$

Für diese Größen lassen sich bestimmte, unter allen Umständen gültige Zahlenwerte für die verschiedenen Materialien nicht angeben; namentlich gilt dies für die zulässige Inanspruchnahme, welche sowohl abhängig ist von der Form und Größe des Querschnittes als auch von der Güte des Materials, sowie von der Art der Beanspruchung desselben. Häufig sind lediglich die baupolizeilichen Vorschriften maßgebend, die aber auch wieder für verschiedene Orte verschieden sein können. Bei größeren statischen Konstruktionen (z. B. bei großen Brücken) pflegt man wohl besondere Versuche mit dem zu verwendenden Baustoffe anzustellen, um die genaueren Zahlenwerte der Tragfestigkeit, Bruchfestigkeit und des Elastizitätsmoduls zu ermitteln.

Die folgende für Baukonstruktionen gültige Tabelle gibt für die wichtigsten Materialien die aus zahlreichen Versuchen gewonnenen Mittelwerte der Größen E und K, sowie die für ruhende Belastungen üblichen bezw. vorgeschriebenen Werte von k in Kilogramm für ein Quadratcentimeter.

Tabelle für Baukonstruktionen.

| Material | Elastizitäts-modul E | Bruchfestigkeit K | | Zulässige Inanspruchnahme k | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Zug | Druck | Zug | Druck |
| Gußeisen . . . . | 1 000 000 | 1200 | 6000 | 250 | 500 |
| Schmiedeeisen . . . | 2 000 000 | 4000 | 3000 | 1000 (750) | 1000 (750) |
| Stahl . . . . . | 2 200 000 | 6000 | 6000 | 1200 | 1200 |
| Tannenholz . . . . | 100 000 | 800 | 400 | 60 | 50 |
| Kiefernholz . . . . | 100 000 | 900 | 450 | 100 | 60 |
| Eichen- u. Buchenholz | 120 000 | 1000 | 500 | 100 | 80 |
| Glas . . . . . | 750 000 | 250 | 1500 | — | 75 |
| Kalkstein . . . . . | 120 000 | — | 300—500 | — | 30—50 |
| Sandstein . . . . | 100 000 | — | 200—300 | — | 20—30 |
| Ziegel . . . . . | — | — | 60—120 | — | 6—12 |
| Kalkmörtel . . . . | — | — | 40 | — | 4 |
| Zementmörtel . . . | — | — | 100—150 | — | 10—15 |
| Baugrund (guter) . . | — | — | — | — | 2,5—4 |

Die eingeklammerten Werte für Schmiedeeisen gelten für solche Bauteile, welche bedeutenden Erschütterungen oder starken Belastungswechseln ausgesetzt sind.

Für gerades Eisenwellblech ist k = 750 (Zug oder Druck)
„ gewölbtes „ „ k = 500 „ „ „

Ueber die zulässige Materialbeanspruchung bei Maschinenkonstruktionen sind eingehende Festigkeitsversuche angestellt von Wöhler, Spangenberg, C. Bach u. a.

Die Wöhler'schen Versuche ergaben folgende Thatsachen:

Der Bruch des Eisens läßt sich bei wiederholter Beanspruchung durch eine weit geringere Kraftwirkung erreichen, als bei einmaliger Beanspruchung möglich ist. Die Tragfähigkeit nimmt also ab, wenn die Belastung keine ruhende, sondern eine oft wechselnde ist.

Die Abnahme der Tragfähigkeit ist um so größer, je größer der Unterschied der oberen und unteren Spannungsgrenze ist.

Selbst bei sehr oft wiederholter Belastung wird das Eisen nicht zerstört, wenn die Beanspruchung auf ein gewisses Maß beschränkt bleibt.

Für die Größe der zulässigen Inanspruchnahme sind danach folgende Belastungsfälle als maßgebend zu Grunde zu legen:

1) Die Belastung ist eine ruhende, unveränderliche.

2) Die Belastung wechselt beliebig oft zwischen den Grenzen Null und einem größten Werte (z. B. bei wiederholter Ausdehnung bezw. Zusammendrückung, wiederholter Biegung, wiederholter Drehung nach einer Richtung hin). Für die zulässige Inanspruchnahme ist hier nur $^2/_3$ der für ruhende Belastung gültigen Werte zu setzen.

3) Die Belastung wechselt beliebig oft zwischen einem größten positiven und einem in absoluter Beziehung gleich großen negativen Werte (z. B. bei wiederholter Biegung und wiederholter Drehung nach entgegengesetzten Richtungen,

sowie bei wiederholter Ausdehnung und darauf folgender Zusammendrückung). Bei diesem Belastungsfall darf für die zulässige Inanspruchnahme nur $^1/_3$ der für ruhende Belastung gültigen Werte eingesetzt werden.

Danach ergeben sich je nach der Art der Beanspruchung bezw. Belastung für die zulässige Inanspruchnahme der verschiedenen Eisensorten folgende Tabellen (nach C. Bach):

I. Die Belastung ist ruhend.

| Material | k = | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Zug | Druck | Biegung | Schub | Drehung |
| Gußeisen | 300 | 900 | 450 | 300 | 300 |
| Schweißeisen | 900 | 900 | 900 | 720 | 360 |
| Flußeisen | 900—1200 | 900—1200 | 900—1200 | 720—960 | 600—840 |
| Stahlguß (Form-Flußeisen) | 600—900 | 900—1200 | 750—1050 | 480—840 | 480—840 |
| Martinstahl | 1200 | 1200 | 1200 | 960 | 900 |
| Tiegelgußstahl | 1500 | 1500 | 1500 | 1200 | 1200 |

II. Die Belastung wechselt zwischen Null und einem Maximum.

| Material | k = | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Zug | Druck | Biegung | Schub | Drehung |
| Gußeisen | 200 | 600 | 300 | 200 | 200 |
| Schweißeisen | 600 | 600 | 600 | 480 | 240 |
| Flußeisen | 600—800 | 600—800 | 600—800 | 480—640 | 400—560 |
| Stahlguß (Form-Flußeisen) | 400—600 | 600—900 | 500—700 | 320—560 | 320—560 |
| Martinstahl | 800 | 800 | 800 | 640 | 600 |
| Tiegelgußstahl | 1000 | 1000 | 1000 | 800 | 800 |

III. Die Belastung wechselt zwischen einem Maximum und einem Minimum.

| Material | k = | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Zug | Druck | Biegung | Schub | Drehung |
| Gußeisen | 100 | 300 | 150 | 100 | 100 |
| Schweißeisen | 300 | 300 | 300 | 240 | 120 |
| Flußeisen | 300—400 | 300—400 | 300—400 | 240—320 | 200—280 |
| Stahlguß (Form-Flußeisen) | 200—300 | 300—450 | 250—350 | 160—280 | 160—280 |
| Martinstahl | 400 | 400 | 400 | 320 | 300 |
| Tiegelgußstahl | 500 | 500 | 500 | 400 | 400 |

Für ungehärteten Federstahl (Belastungsfall II, Biegung) ist: $k = 3600$.
„ gehärteten „ ( „ II, „ ) „ : $k = 4300$.

Für die gehärteten Federn der Lokomotiven und Eisenbahnwagen kann man etwa annehmen: $k = 6000$.

## § 2.

# Widerstand gegen Zug und Druck.

Eine am oberen Endpunkte aufgehängte und durch ein Gewicht P belastete prismatische gerade Stange von F qcm Querschnitt kann angesehen werden als bestehend aus F einzelnen Stangen von je 1 qcm Querschnitt.

Ist k die zulässige Inanspruchnahme, so kann jede dieser Einzelstangen belastet werden mit k kg, folglich die ganze Stange, deren Querschnitt F qcm beträgt, mit k F kg, daher:

$$P = F k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Belastung = Querschnitt × Inanspruchnahme.

Die Belastung erzeugt nach § 1 in der Stange, deren Länge = l sein möge, eine Verlängerung $\lambda$, welche sich, wie die Erfahrung lehrt, gleichmäßig über die ganze Länge der Stange verteilt. Durch Versuche ist ferner festgestellt, daß innerhalb der Elastizitätsgrenze die Verlängerung in demselben Verhältnis zu- oder abnimmt, als die Belastung P selbst, so daß z. B. bei einer und derselben Stange 2 P die doppelte Verlängerung, $^1/_4$ P nur den vierten Teil der Verlängerung erzeugen würde als P.

Die Verlängerungen verhalten sich also wie die Belastungen.

In einer Einzelstange von 1 qcm Querschnitt und l cm Länge entsteht nun die Verlängerung $\lambda$ durch die Belastung k. Nach § 1 erzeugt der Elastizitätsmodul E in derselben Stange die Verlängerung l, folglich ist:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{k}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Setzt man hierin für k den sich aus Gl. 1) ergebenden Wert:

$$k = \frac{P}{F}$$

ein, so erhält man für die Verlängerung $\lambda$, welche in einer Stange von F qcm Querschnitt und l cm Länge durch eine Belastung von P kg erzeugt wird, den Ausdruck:

$$\lambda = \frac{P l}{F E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Die Verlängerung $\lambda$ steht in geradem Verhältnis zu der Belastung und der Länge der Stange, in umgekehrtem Verhältnis zu dem Querschnitt und dem Elastizitätsmodul.

Das Verhältnis:

$$\frac{\text{Verlängerung}}{\text{Ursprüngliche Länge}} = \frac{\lambda}{l} = \varepsilon$$

heißt die Dehnung.

Die Dehnung wird hervorgebracht durch die Spannung k und man nennt das Verhältnis:

$$\frac{\text{Dehnung}}{\text{Spannung}} = \frac{\varepsilon}{k} = \frac{\lambda}{l\,k}$$

den Dehnungskoefficient, den umgekehrten (reciproken) Wert aber den Elastizitätsmodul E. Danach ist:

$$E = \frac{k\,l}{\lambda} = \frac{P\,l}{F\lambda}$$

woraus sich für die Verlängerung $\lambda$ wieder der obige Ausdruck Gl. 3) ergibt.

Die Gleichungen 1, 2 und 3 gelten ebenfalls für einen am unteren Endpunkte befestigten kurzen Stab, auf welchen am oberen Endpunkte die Belastung P wirkt. Die Druckkraft P erzeugt in dem Stabe die Druckspannung k und die Verkürzung $\lambda$.

Aufgabe 1. Wenn eine Hängesäule von Eichenholz eine Belastung von 14000 kg mit Sicherheit tragen soll, wie groß muß die Seite a des quadratischen Querschnittes genommen werden? (k = 100)

Auflösung. Nach Gl. 1) ist:

$$F = \frac{P}{k} = \frac{14000}{100} = 140 \text{ qcm}$$

Nun ist:

$$F = a^2$$

folglich:

$$a^2 = 140$$

$$a = \sqrt{140} = \sim 12 \text{ cm}$$

Aufgabe 2. Wie groß muß der Durchmesser d einer schmiedeeisernen Stange sein, welche in der Achsenrichtung mit 25000 kg belastet werden soll? (k = 1000)

Auflösung. Nach Gl. 1) ist:

$$F = \frac{P}{k} = \frac{25000}{1000} = 25 \text{ qcm}$$

Nun ist:

$$F = \frac{d^2\pi}{4}$$

folglich:

$$\frac{d^2\pi}{4} = 25$$

$$d = \sqrt{\frac{25 \cdot 4}{3{,}14}} = \sim 5{,}6 \text{ cm}$$

Aufgabe 3. Welche Belastung kann ein 1½ Stein starker quadratischer Pfeiler aus Ziegelstein tragen bei einer Inanspruchnahme k = 7 kg?

Auflösung. Bei Normalziegeln (25 × 12 × 6,5 cm) ist die Seitenlänge des Pfeilers bei 1 cm Fuge:

$$a = 25 + 1 + 12 = 38 \text{ cm}$$

folglich der Querschnitt:

$$F = 38 \cdot 38 = 1444 \text{ qcm}$$

und nach Gl. 1):

$$P = F \cdot k = 1444 \cdot 7 = 10108 \text{ kg}$$

Aufgabe 4. Wie groß muß der Durchmesser d einer vollen gußeisernen kurzen Säule sein, welche eine Last von 20000 kg zu tragen hat? ($k = 500$)

Auflösung. Nach Gl. 1) ist:

$$F = \frac{P}{k} = \frac{20000}{500} = 40 \text{ qcm}$$

$$\frac{d^2 \pi}{4} = 40$$

$$d = 7{,}14 \text{ cm}$$

Aufgabe 5. Wie groß muß die Seite a des quadratischen Fußes der vorigen Säule sein, wenn der Unterstützungsquader mit $k = 25$ kg beansprucht werden darf, und wie groß ist die Beanspruchung $k_1$ des Baugrundes, wenn der Unterstützungsquader der Säule 75 cm lang und 70 cm breit ist?

Auflösung.

$$a^2 = \frac{20000}{25} = 800 \text{ qcm}$$

$$a = 28{,}3 \text{ cm}$$

$$k_1 = \frac{20000}{75 \cdot 70} = 3{,}8 \text{ kg}$$

Aufgabe 6. Der Kolben einer hydraulischen Presse hat $D = 40$ cm Durchmesser. Wie stark ist jede der vier cylindrischen schmiedeeisernen Säulen bei der Beanspruchung $k = 1000$ zu nehmen, wenn der Wasserdruck $p = 160$ kg für 1 qcm (160 Atmosphären) beträgt?

Auflösung. Der Kolbenquerschnitt ist:

$$\frac{D^2 \pi}{4} = \frac{40^2 \cdot 3{,}14}{4} = 1256 \text{ qcm}$$

folglich kommt auf jede der vier Säulen die Kraft:

$$P = \frac{1256 \cdot 160}{4} = 50240 \text{ kg}$$

Nach Gl. 1) wird dann der erforderliche Säulenquerschnitt:

$$F = \frac{P}{k}$$

also:

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{50240}{1000} = 50{,}24 \text{ qcm}$$

woraus folgt:

$$d = 8 \text{ cm}$$

Aufgabe 7. Eine Kette ist belastet mit $P = 4000$ kg. Es soll der erforderliche Durchmesser d des Ketteneisens berechnet werden unter Annahme von $k = 637$ kg/qcm.

Auflösung. Die Last verteilt sich auf 2 Querschnitte des Ketteneisens. Danach:

$$2\,\frac{d^2\pi}{4}\,637 = 4000$$

$$\frac{d^2\pi}{4} = \frac{4000}{2\,.\,637} = 3{,}14 \text{ qcm}$$

$$d = 2 \text{ cm}$$

Aufgabe 8. Für einen Dampfcylinder von D = 60 cm Durchmesser, in welchen der Dampf mit 8 Atmosphären Ueberdruck (p = 8 kg/qcm) eintritt, soll die Anzahl und der Durchmesser der Deckelschrauben berechnet werden.

Auflösung. Der Durchmesser des Kreises, in dem die Deckelschrauben angeordnet sind, beträgt etwa $D_1 = 70$ cm; der Umfang desselben ist also:

$$D_1\,\pi = 70\,.\,3{,}14 = 220 \text{ cm}.$$

Nimmt man die Entfernung der Schrauben von einander zu 14 cm an, so sind erforderlich:

$$i = \frac{220}{14} = \sim 16 \text{ Schrauben}.$$

Der Dampfdruck ist:

$$\frac{D^2\pi}{4}\,.\,p = \frac{60^2\,.\,3{,}14}{4}\,.\,8 = \sim 22620 \text{ kg}$$

Eine Schraube ist daher belastet mit:

$$P = \frac{22620}{16} = 1414 \text{ kg}$$

Für k = 350 kg/qcm ergibt sich der erforderliche Kernquerschnitt zu:

$$\frac{d_1{}^2\pi}{4} = \frac{1414}{350} = 4{,}04 \text{ qcm}$$

und danach:

$$d_1 = 2{,}27 \text{ cm}$$

Der nächstliegende Wert der Whitworth'schen Schraubentabelle ist:

$$d_1 = 2{,}39 \text{ cm}$$

welcher dem äußeren Schraubendurchmesser

$$d = 2{,}86 \text{ cm} = 1\,^1/_8{}''$$

entspricht.

Aufgabe 9. Wenn der äußere Durchmesser D einer hohlen gußeisernen Säule, welche eine Last von 30000 kg zu tragen hat, = 12 cm ist, wie groß muß dann der innere Durchmesser d angenommen werden? (k = 500)

Auflösung.

$$F = \frac{P}{k} = \frac{30000}{500} = 60 \text{ qcm}$$

$$\frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 60$$

$$D^2 - d^2 = \frac{4\,.\,60}{3{,}14}$$

$$d^2 = D^2 - \frac{4\,.\,60}{3{,}14} = 144 - 76{,}4 = 67{,}6$$

$$d = 8{,}2 \text{ cm}$$

Die Wandstärke der Säule wird dann:

$$\delta = \frac{D - d}{2} = \frac{12 - 8{,}2}{2} = 1{,}9 \text{ cm}$$

Aufgabe 10. Wie viel beträgt die Zusammendrückung der obigen Säule, wenn die Länge derselben 140 cm ist?

Auflösung. Nach Gl. 3) S. 6 ist:

$$\lambda = \frac{30000 \cdot 140}{60 \cdot 1000000} = 0{,}07 \text{ cm}$$

Aufgabe 11. Eine schmiedeeiserne Stange von 500 cm Länge, deren Querschnitt ein Rechteck von 5 cm Länge und 3 cm Breite bildet, wird belastet mit 12000 kg. Wie groß ist die Verlängerung?

Auflösung.

$$F = 5 \cdot 3 = 15 \text{ qcm}$$

folglich:

$$\lambda = \frac{12000 \cdot 500}{15 \cdot 2000000} = 0{,}2 \text{ cm}$$

Aufgabe 12. Eine Stahlstange von 200 cm Länge und 4 qcm Querschnitt soll durch ein Gewicht um 0,12 cm ausgedehnt werden. Wie groß muß dieses Gewicht sein?

Auflösung. Nach Gl. 3) S. 6 ist:

$$P = \frac{\lambda \cdot F \cdot E}{l}$$

$$P = \frac{0{,}12 \cdot 4 \cdot 2200000}{200} = 5280 \text{ kg}$$

Aufgabe 13. Eine runde schmiedeeiserne Stange von 350 cm Länge wurde durch ein Gewicht von 8000 kg um 0,14 cm ausgedehnt. Wie groß war der Durchmesser d dieser Stange?

Auflösung. Da hier:

$$F = \frac{d^2 \pi}{4}$$

so ist nach Gl. 3) S. 6:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{P\,l}{\lambda E} = \frac{8000 \cdot 350}{0{,}14 \cdot 2000000} = 10 \text{ qcm}$$

$$d = \backsim 3{,}6 \text{ cm}$$

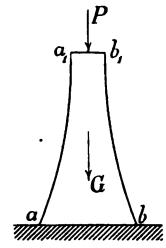
Bisher wurde das Eigengewicht der gezogenen oder gedrückten Körper nicht weiter berücksichtigt und kann sehr häufig auch ohne wesentlichen Fehler vernachlässigt werden. In manchen Fällen dagegen kann die Natur der Aufgabe es verlangen, das Eigengewicht, welches z. B. bei Mauerwerk eine bedeutende Rolle spielt, auch bei langen Schachtgestängen ziemlich erheblich ist, mit in Rechnung zu ziehen.

Ist G das Eigengewicht eines Mauerpfeilers, welcher oben durch das Gewicht P belastet ist, so wirkt auf den unteren Querschnitt die Last P + G. Die Grundfläche des Pfeilers muß daher die Größe erhalten:

$$F = \frac{P + G}{k}$$

Auf irgend einen anderen Querschnitt des Pfeilers kommt ein um so geringerer Teil des Eigengewichtes, je höher dieser Querschnitt über dem unteren liegt. Die Querschnitte könnten deshalb nach oben hin allmählich kleiner werden bis zum oberen, welcher nur durch P belastet wird.

Fig. 6.

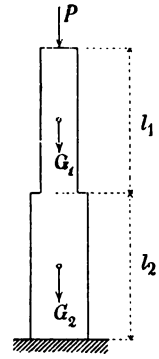



Bei genauer Berechnung ergeben sich als Begrenzungslinien des Pfeilers Kurven und man würde danach dem Pfeiler etwa die nebenstehende Form (Fig. 6) zu geben haben. Aus praktischen Gründen thut man dies indes selten, sondern stellt hohe Pfeiler gewöhnlich mit geradlinigen Böschungen her, indem man die Punkte $a\,a_1$ und $b\,b_1$ durch gerade Linien verbindet.

Bei höheren Gebäudemauern führt man einen Querschnitt unverändert durch ein oder zwei Stockwerke durch und geht dann nach oben hin sprungweise auf den nächsten kleineren Querschnitt über.

Die nebenstehende Fig. 7 möge eine solche abgetreppte Mauer darstellen. Ist $F_1$ der Querschnitt und $G_1$ das Gewicht des oberen, $F_2$ der Querschnitt und $G_2$ das Gewicht des unteren Teiles, so wird:

Fig. 7.




$$F_1 = \frac{P + G_1}{k}$$

$$F_2 = \frac{P + G_1 + G_2}{k}$$

Bezeichnet man mit $\gamma$ das Gewicht der Kubikeinheit des Materiales, so ist:

$$G_1 = \gamma F_1 l_1$$
$$G_2 = \gamma F_2 l_2$$

Aufgabe 14. Ein 150 m langes schmiedeeisernes Schachtgestänge von quadratförmigem Querschnitt hat außer seinem Eigengewicht noch eine Last $P = 20000$ kg zu tragen. Dasselbe besteht aus 5 in der Längsrichtung miteinander verbundenen prismatischen Stäben von je $l = 30$ m Länge. Welchen Querschnitt muß jeder einzelne Stab (bei $k = 500$)*) erhalten, wenn das Gewicht von 1 cbcm Schmiedeeisen: $\gamma = 0{,}0078$ kg beträgt?

Auflösung. Für den untersten Stab ist, wenn $a_1$ die Seite des quadratischen Querschnitts bedeutet:

$$a_1^2 = \frac{P + \gamma\, a_1^2\, l}{k}$$

$$a_1^2\,(k - \gamma\, l) = P$$

$$a_1^2 = \frac{P}{k - \gamma\, l} = \frac{20000}{500 - 0{,}0078 \cdot 3000} = 42$$

$$a_1 = \sqrt{42} = 6{,}5 \text{ cm}$$

*) Bei Schachtgestängen nimmt man wegen der beständigen Bewegung die zulässige Beanspruchung nur gering an.

Das Gewicht des Stabes beträgt danach:

$$G_1 = \gamma\, l\, a_1^2 = 0{,}0078 \,.\, 3000 \,.\, 42 = 983 \text{ kg}$$

Für den zweiten Stab (von unten ab gerechnet) ist:

$$a_2^2 = \frac{P + G_1 + \gamma\, a_2^2\, l}{k}$$

Man findet:

$$a_2 = 6{,}6 \text{ cm} \quad ; \quad G_2 = 1030 \text{ kg}$$

Desgleichen für die weiteren Stäbe:

$$a_3 = 6{,}8 \text{ cm} \quad ; \quad G_3 = 1080 \text{ kg}$$
$$a_4 = 7{,}0 \text{ cm} \quad ; \quad G_4 = 1134 \text{ kg}$$
$$a_5 = 7{,}1 \text{ cm} \quad ; \quad G_5 = 1190 \text{ kg}$$

Das Gewicht des ganzen Gestänges beträgt:

$$G = 5417 \text{ kg}$$

Wäre das Gestänge mit überall gleichem Querschnitt ausgeführt, so würde sein:

$$a^2 = \frac{P + \gamma\, a^2 L}{k}$$

$$a^2 = \frac{P}{k - \gamma L} = \frac{20000}{500 - 0{,}0078 \,.\, 15000} = 52{,}2 \text{ qcm}$$

$$a = \sqrt{52{,}2} = \sim 7{,}2 \text{ cm}$$

$$G = \gamma\, L\, a^2 = 0{,}0078 \,.\, 15000 \,.\, 52{,}2 = 6107 \text{ kg}$$

Da die Beanspruchung k für das ganze Gestänge nahezu den gleichen Wert 500 hat, so ist nach Gl. 2) S. 6 die Verlängerung sehr angenähert:

$$\lambda = \frac{500 \,.\, 15000}{2000000} = 3{,}75 \text{ cm}$$

## § 3.

## Flächenmomente und Säulenmomente*).

Unter dem statischen Moment einer Kraft, bezogen auf eine senkrecht zur Kraftebene stehende Achse, versteht man bekanntlich das Produkt aus der Kraft und dem rechtwinkligen Abstande derselben von der Achse (dem Hebelarm).

Wirken in derselben Ebene gleichzeitig mehrere Kräfte, so ist das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte**).

Dieser Satz der statischen Momente gilt auch für in verschiedenen Ebenen liegende Parallelkräfte und lautet dann:

Das statische Moment der Mittelkraft paralleler Kräfte in Bezug auf eine beliebige Ebene ist gleich der Summe der statischen Momente aller Einzelkräfte in Bezug auf dieselbe Ebene.

*) Nach R. Land. Vergl. Zeitschr. d. V. d. J. 1897, S. 1246.

**) Siehe Lauenstein, Mechanik, 4. Aufl., § 6.

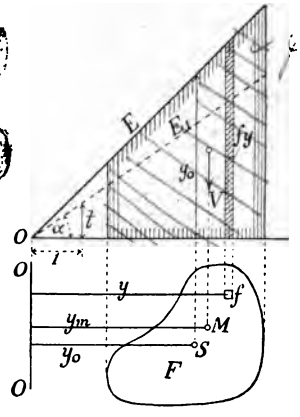
Bestehen die Parallelkräfte aus den Gewichten der einzelnen Massenteilchen eines Körpers, ist also deren Mittelkraft gleich dem Gewichte der ganzen Körpermasse, so kann, da sich die Gewichtsteilchen wie die Massenteilchen verhalten, der obige Satz auch in der Fassung ausgesprochen werden:

Das statische Moment der ganzen Masse eines Körpers ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Massenteilchen, bezogen auf ein und dieselbe Ebene.

Hat der Körper die Gestalt einer sehr dünnen ebenen Platte, die man als gleichmäßig mit Masse bedeckte Fläche ansehen kann, so läßt sich, indem man die einzelnen Flächenteile als Gewichte auffaßt, auch der Begriff des statischen Momentes auf eine Fläche ausdehnen. In diesem Sinne erhält man den Satz:

Das statische Moment der ganzen Fläche (Fläche mal Schwerpunktsabstand), bezogen auf eine beliebige Ebene, ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Flächenteilchen, bezogen auf dieselbe Ebene.

Fig. 8.




Es sei nun eine beliebige Fläche F gegeben (Fig. 8) und eine Ebene senkrecht dazu, welche die Flächenebene in der Geraden O O schneidet. Die Gerade O O wird kurz als Achse bezeichnet. Ist dann $y_0$ der Abstand des Schwerpunktes S der Fläche F von der Achse, sind ferner $f_1\ f_2 \ldots$ die einzelnen Flächenteilchen und $y_1\ y_2 \ldots$ deren senkrechte Abstände von der Achse O O, so ist:

$$F\,y_0 = f_1\,y_1 + f_2\,y_2 + \ldots = \Sigma(f\,y) \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Trägt man nun die Abstände y auf den zugehörigen f als Höhen auf und betrachtet das dadurch entstehende jedesmalige f y als den Inhalt eines Säulchens, so erhält man in der Gesamtheit als körperliche Darstellung von $\Sigma$ (f y) eine über der Fläche F errichtete Säule, welche oben schräg begrenzt ist durch eine unter 45° gegen F geneigte Ebene E. Diese schneidet die Ebene der Fläche F in der Geraden O O.

Die über F errichtete oben abgeschrägte Säule, deren Inhalt mit V bezeichnet werden möge, ist also gleich dem statischen Moment (dem Flächenmoment) von F bezogen auf die Achse O O.

$$V = \Sigma(f\,y) = F\,y_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Wird die Säule, anstatt durch die unter 45° geneigte Ebene E, oben begrenzt durch eine Ebene $E_1$ mit dem Neigungswinkel $\alpha$, welcher bestimmt ist durch die Höhe t im Abstande 1 von der O O ($\operatorname{tg}\alpha = t : 1$), und wird deren Inhalt mit $V_\alpha$ bezeichnet, so ist:

$$\frac{V_\alpha}{V} = \frac{t}{1}$$

oder

$$V_\alpha = t \,.\, V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Das statische Moment eines Säulchens $fy$ (kurz genannt Säulenmoment) bezogen auf die Achse O O ist nun $= fy \cdot y = fy^2$, folglich das Säulenmoment für die ganze Säule V, wenn $y_m$ deren Schwerpunktsabstand von der O O bedeutet:

$$V \cdot y_m = \Sigma (fy^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

Für die Säule $V_a$ mit den um $t : 1$ geänderten Höhen ergibt sich entsprechend:

$$V_a \cdot y_m = t \cdot \Sigma (fy^2) \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

Der Ausdruck $\Sigma (fy^2)$ bedeutet die Summe aller Flächenteilchen, multipliziert mit dem Quadrate ihrer Abstände von der Achse O und wird das Trägheitsmoment der Fläche F in Bezug auf die Achse O genannt. Bezeichnet man dasselbe durch $J_0$, setzt also:

$$J_0 = \Sigma (fy^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

so erhält man aus Gl. 7):

$$V \cdot y_m = J_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

oder in Worten:

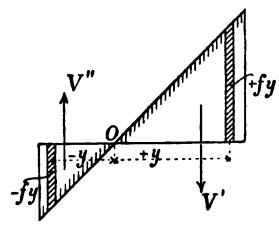
Das Säulenmoment der Säule $V = Fy_0$ ist gleich dem Trägheitsmoment $J_0$ der Fläche F für die Achse O.

Für die Säule $V_a$ ergibt sich ebenso:

$$V_a \cdot y_m = t \cdot J_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 11)$$

Liegt die Achse O nicht, wie bisher angenommen, außerhalb der Fläche F, sondern schneidet sie dieselbe (wie in Fig. 9), so haben die auf verschiedenen Seiten der Achse liegenden Abstände y der Flächenteilchen f verschiedenes Vorzeichen, und folglich werden dann die zugehörigen Flächenmomente bei der Säulendarstellung nach verschiedenen Seiten der F-Ebene aufgetragen. Die beiden Säulenteile V' und V'' gehen in diesem Falle in Keilstücke über, von denen eins positiv, das andere negativ zu nehmen ist, deren Momente also in Bezug auf die Achse O die gleiche Drehrichtung haben, so daß die von ihnen gelieferten Beiträge für das Trägheitsmoment $J_0$ gleiches Vorzeichen und zwar das positive haben, weil $J_0 = \Sigma (fy^2)$ als Ausdruck vierten Grades stets positiv sein muß.

Fig. 9.



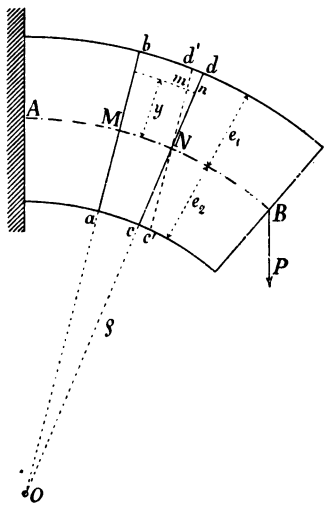

## § 4.

## Widerstand gegen Biegung.

Ist ein gerader, in Bezug auf die Bildebene symmetrisch vorausgesetzter Balken mit seinem einen Ende eingespannt, und wird das andere freie Ende desselben durch ein in der Symmetrieebene angreifendes Gewicht P belastet, so erfährt derselbe dadurch eine Biegung (Fig. 10).

Denkt man sich den Balken aus einzelnen Fasern bestehend, welche der Längsachse parallel sind, so werden durch die Biegung die oberen Fasern verlängert, die unteren Fasern verkürzt. Zwischen der obersten und untersten Faserschicht muß sich eine mittlere senkrecht zur Bildebene stehende Faserschicht A B befinden, die weder verlängert noch verkürzt, sondern nur gebogen wird. Diese heißt die neutrale Faserschicht. Diese Schicht schneidet jeden durch den Körper gelegten Querschnitt in einer geraden Linie, welche die neutrale Achse des Querschnitts genannt wird.

Fig. 10.




Die beiden, sehr nahe aneinander liegenden Querschnitte a b und c d des Balkens (Fig. 10), welche vor der Biegung einander parallel waren, haben nach der Biegung eine gegeneinander geneigte Lage. Zieht man durch N zu a b die Parallele c' d', so stellen die Abschnitte zwischen c d und c' d' die Verlängerungen bezw. Verkürzungen der einzelnen Faserabschnitte dar, welche vor der Biegung sämtlich die Länge M N hatten. So z. B. ist m n die Verlängerung einer Faser, welche den Abstand y von der neutralen Faserschicht hat; d' d die Verlängerung der im Abstande $e_1$ von der neutralen liegenden äußersten Faser, c c' die Verkürzung der untersten Faser im Abstande $e_2$ von der neutralen.

Nach Fig. 10 ist:

$$\frac{m\,n}{d'\,d} = \frac{y}{e_1}$$

Nach § 2 verhalten sich nun die Verlängerungen wie die Spannungen. Wird also mit s die Spannung der im Abstande y von der neutralen befindlichen Faser, mit $k_1$ die Spannung der auf der erhabenen Seite liegenden äußersten Faser bezeichnet, so ist:

$$\frac{m\,n}{d'\,d} = \frac{s}{k_1}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{s}{k_1} = \frac{y}{e_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Ebenso wird:

$$\frac{s}{k_2} = \frac{y}{e_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

Die Spannungen der einzelnen Fasern eines gebogenen Balkens verhalten sich wie ihre Abstände von der neutralen Faser.

Die inneren Spannungen müssen den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Denkt man sich den Balken durch eine im Abstande x vom Ende hindurchgelegte Querschnittsebene in zwei Teile zerschnitten (Fig. 11), so sind an der Schnittstelle solche in der Symmetrieebene angreifende äußere Kräfte anzubringen, daß dadurch genau dieselbe Wirkung hervorgebracht wird, als vorher durch die inneren Spannungen.

Für das Balkenstück B N (Fig. 11), welches, da die Biegung in den weitaus meisten Fällen nur sehr gering ist, wagerecht angenommen werden kann, hat man dann die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anzuwenden.

Fig. 11.

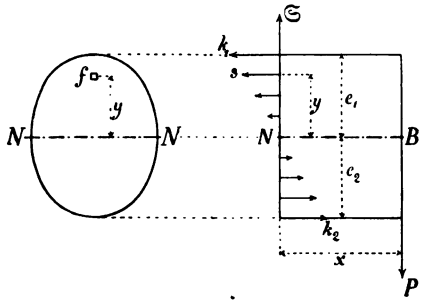
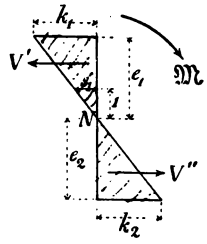



Fig. 11a.




Diese lauten bekanntlich, da nach der obigen Voraussetzung die Kräfte hier alle in einer Ebene wirken:

1) Die algebraische Summe der lotrechten Kräfte muß = Null sein.
2) Die algebraische Summe der wagerechten Kräfte muß = Null sein.
3) Die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Drehpunkt muß = Null sein.

Nach der ersten dieser Bedingungen ist an der Schnittstelle eine lotrecht nach oben gerichtete Kraft:

$$S = P$$

anzubringen, welche als Abscherungswiderstand wirkt und eine Verschiebung des Balkenstückes in der Schnittebene verhindert.

Die einzigen wagerechten Kräfte, welche auf das Balkenstück B N wirken, sind die Spannungswiderstände, welche in der oberen Hälfte der Schnittfläche als Zugspannungen (von rechts nach links gerichtet), in der unteren Hälfte als Druckspannungen (von links nach rechts gerichtet) wirken.

Trägt man diese Spannungswiderstände, welche sich (wie oben bereits gesagt war) verhalten, wie ihre Abstände von der neutralen Faser, auf den zugehörigen Flächenteilchen f als Strecken auf (Fig. 11a), so bilden sie in ihrer Gesamtheit einen Spannungsdoppelkeil vom Inhalt $V = V' + V''$, begrenzt einer-

seits von der Querschnittsfläche F, andererseits von einer durch die N N verlaufenden Ebene, deren Neigung bestimmt ist durch die Spannung $s_1$ im Abstande 1 von der N N. Nach der zweiten Gleichgewichtsbedingung muß dann sein:

$$V = V' + V'' = 0$$

also auch nach Gl. 5) S. 13:

$$\Sigma (f y) = 0$$

d. h. die Summe der statischen Momente (Flächenmomente) sämtlicher Flächenteilchen der Querschnittsfläche in Bezug auf die Achse N N muß = Null sein, woraus nach der Lehre vom Schwerpunkt*) folgt, daß die Achse N N eine Schwerachse der Querschnittsfläche ist.

Da dies für alle Querschnittsflächen gilt, die durch den Balken hindurchgelegt werden können, so erhält man den Satz:

Die neutrale Faserschicht geht durch die Schwerpunkte sämtlicher Querschnittsflächen hindurch.

Nach der dritten Gleichgewichtsbedingung muß in Bezug auf jede beliebige, also auch z. B. in Bezug auf die Achse N das rechts herumdrehende Moment M der äußeren Kraft P gleich der Summe der Momente der in der Schnittfläche wirkenden Spannungswiderstände sein, welche für sich eine Drehung nach links hervorbringen würden.

Letztere werden in Fig. 11a dargestellt durch das Säulenmoment des Spannungsdoppelkeiles, und man erhält daher unter Benutzung der Gl. 8) bezw. 11) S. 14:

$$\mathfrak{M} = s_1 \Sigma (f y^2) = s_1 J$$

worin $\Sigma (f y^2) = J$ das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche F in Bezug auf die Schwerachse N N bedeutet:

Nun ist nach Fig. 11a:

$$s_1 : 1 = k_1 : e_1 = k_2 : e_2$$

oder

$$s_1 = \frac{k_1}{e_1} = \frac{k_2}{e_2}$$

folglich wird:

$$\mathfrak{M} = k_1 \frac{J}{e_1} = k_2 \frac{J}{e_2} \quad \ldots\ldots\ldots 14)$$

Den Ausdruck $\frac{J}{e_1}$ bezw. $\frac{J}{e_2}$ nennt man das Widerstandsmoment des Querschnittes und bezeichnet dasselbe mit $W_1$ bezw. $W_2$

$$W_1 = \frac{J}{e_1} \text{ desgl. } W_2 = \frac{J}{e_2} \quad \ldots\ldots\ldots 15)$$

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 4. Aufl., § 9, Gl. 35.

Danach ist:

$$\mathfrak{M} = k_1 W_1 = k_2 W_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

Meistens liegt der Schwerpunkt des Querschnittes, also auch die neutrale Achse in der Mitte der Höhe; es ist dann $e_1 = e_2 = e$ folglich auch $W_1 = W_2 = W$, und man erhält:

$$\mathfrak{M} = k W \quad \ldots \ldots \ldots \quad 17)$$

**Biegungsmoment = k × Widerstandsmoment.**

Da f als Flächenteilchen ein quadratischer Ausdruck ist (Breite × Höhe), so erscheint das Trägheitsmoment stets als Größe vierten Grades, das Widerstandsmoment als Größe dritten Grades.

Trägheitsmoment und Widerstandsmoment in Bezug auf die Schwerachse sind nur abhängig von der Form und Größe des Querschnittes.

## § 5.

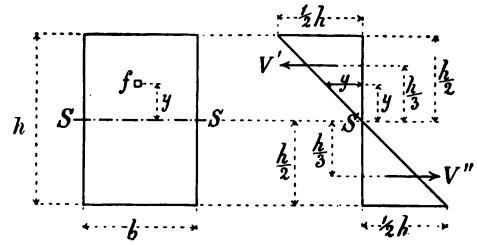
## Trägheitsmomente und Widerstandsmomente.

Aus dem allgemeinen Ausdruck für das Trägheitsmoment:

$$J = \Sigma (f y^2)$$

ergeben sich für die verschiedenen Querschnittsformen bestimmte Werte, welche sich für das Rechteck und die aus Rechtecken zusammengesetzten regelmäßigen Figuren,

Fig. 12.




für das Dreieck und für den Kreis mit elementaren Mitteln berechnen lassen, in allen anderen Fällen aber durch Integration zu bestimmen sind.

Bei dem Rechteck von der Breite b und der Höhe h (Fig. 12) entsteht durch Auftragen der Abstände y von der Schwerachse S auf die zugehörigen Flächenteilchen f ein Doppelkeil mit der Keilkante SS.

Der Inhalt eines Keilstückes ist:

$$V' = V'' = \frac{1}{2}\left(\frac{b\,h}{2} \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{b\,h^2}{8}$$

und der Abstand des Schwerpunktes desselben von der Achse S:

$$y_m = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$$

folglich:

$$V \cdot y_m = (V' + V'')\, y_m = 2\,\frac{b\,h^2}{8} \cdot \frac{h}{3} = \frac{b\,h^3}{12}$$

Fig. 13.

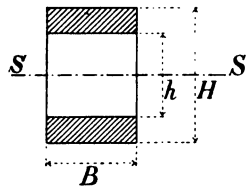



Fig. 14.

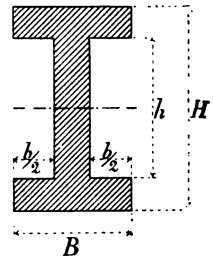
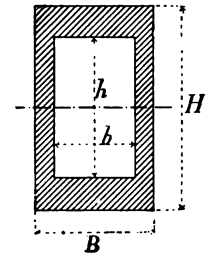



Fig. 15.




Danach ist unter Berücksichtigung der Gl. 10) S. 14 das Trägheitsmoment des Rechteckes in Bezug auf die Schwerachse:

$$\boxed{J = \frac{b\,h^3}{12}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

Für den besonderen Fall, daß das Rechteck ein Quadrat von der Seite a ist, erhält man:

$$\boxed{J = \frac{a^4}{12}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

Fig. 16.

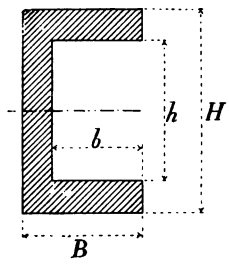



Fig. 17.

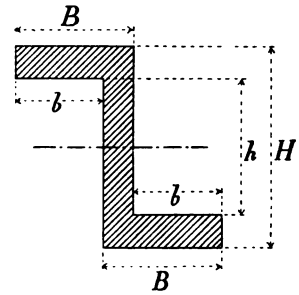



Fig. 13 kann angesehen werden als Differenz der beiden Rechtecke B H und B h, folglich ist das Trägheitsmoment dieses Querschnittes gleich der Differenz der Trägheitsmomente der beiden Rechtecke.

$$J = \frac{B\,H^3}{12} - \frac{B\,h^3}{12} = \frac{B\,(H^3 - h^3)}{12}$$

Ebenso lassen sich die Querschnitte Fig. 14 bis 17 ansehen als Differenz der Rechtecke B H und b h, danach ist:

$$J = \frac{B H^3}{12} - \frac{b h^3}{12}$$

Die Querschnitte Fig. 18 bis 20 können aufgefaßt werden als Summe der Rechtecke B H und b h, folglich:

$$J = \frac{B H^3}{12} + \frac{b h^3}{12}$$

Fig. 18.

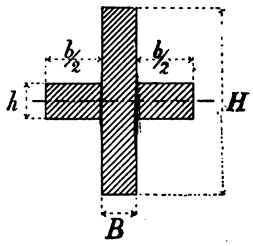



Fig. 19.

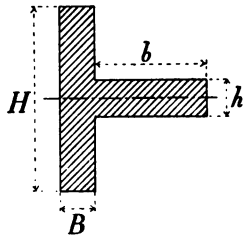
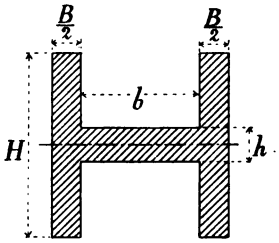
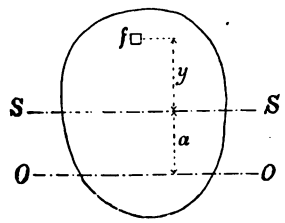



Fig. 20.




Die Größe des Trägheitsmomentes eines bestimmten Querschnittes ist abhängig von der Lage der Achse. Bei den bisher aufgeführten Trägheitsmomenten ist die Achse stets Schwerpunktsachse und zugleich Symmetrieachse, d. h. sie geht durch den Schwerpunkt des Querschnitts und teilt denselben in zwei symmetrische Hälften. Das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine andere Achse O O, welche der Schwerpunktsachse S S parallel ist und den Abstand a von derselben hat (Fig. 21), kann folgendermaßen bestimmt werden:

Fig. 21.




Ist f irgend ein sehr kleines Flächenteilchen, so ist das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die Achse O

$$f(y + a)^2$$

folglich das Trägheitsmoment der ganzen Fläche:

$$J_o = \Sigma f(y + a)^2$$
$$J_o = \Sigma (f y^2 + 2 f y a + f a^2)$$
$$J_o = \Sigma (f y^2) + 2 a \Sigma (f y) + a^2 \Sigma (f)$$

Das erste Glied der rechten Seite ist das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Schwerpunktsachse; in dem zweiten Gliede bedeutet $\Sigma (f y)$ das statische Moment aller Flächenteilchen in Bezug auf die Schwerachse, welches nach der Lehre vom Schwerpunkt gleich Null ist, folglich muß das ganze zweite Glied = Null sein. Das dritte Glied ist, wenn F die ganze Querschnittsfläche bedeutet, $= F a^2$.

Danach ist:

$$\mathbf{J_o = J_s + F a^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 20)$$

Man erhält das Trägheitsmoment in Bezug auf eine der Schwerachse parallele Achse, wenn man zu dem Trägheitsmomente in Bezug auf die Schwerachse das Produkt aus der ganzen Querschnittsfläche und dem Quadrat des Abstandes der beiden Achsen hinzufügt.

Für ein Rechteck $b \times h$ ist z. B. das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerachse

$$J_s = \frac{b\,h^3}{12}$$

folglich ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch die untere Kante des Rechtecks gelegte Achse, da hier $F = b\,h$ und $a = \frac{1}{2}\,h$ einzusetzen ist:

$$J_o = \frac{b\,h^3}{12} + b\,h\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\mathbf{J_o = \frac{b\,h^3}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

Nach Gl. 20) ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerachse von allen Trägheitsmomenten das kleinste.

Bei den Querschnittsformen Fig. 22 bis 24 ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse O

$$J_o = \frac{B\,H^3}{3} + \frac{b\,h^3}{3}$$

Wird mit F die ganze Querschnittsfläche und mit $x_o$ der Abstand des Schwerpunktes derselben von der Achse O bezeichnet, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerachse:

$$J_s = J_o - F\,x_o^2$$

Zur Bestimmung des Schwerpunktsabstandes $x_o$ ist der S. 13 angeführte Satz anzuwenden: Das statische Moment der ganzen Fläche ist gleich

Fig. 22.

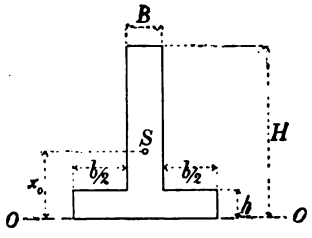
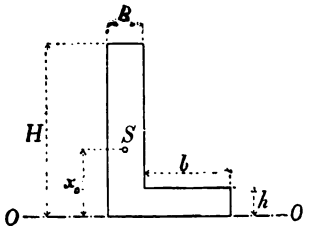



Fig. 23.




der Summe der statischen Momente der einzelnen Flächenteile in Bezug auf eine beliebige Achse. Danach ist in Bezug auf die Achse O:

$$F\,x_o = B\,H \cdot \frac{H}{2} + b\,h \cdot \frac{h}{2}$$

$$x_o = \frac{B\,H^2 + b\,h^2}{2\,F}$$

Z. B. ist für ein Winkeleisen $10 \times 10 \times 1{,}2$ cm (Fig. 25) ohne Berücksichtigung der Abrundungen:

$$F = 1{,}2 \,.\, 10 + 8{,}8 \,.\, 1{,}2 = 22{,}6 \text{ qcm}$$

$$x_0 = \frac{1{,}2 \,.\, 10^2 + 8{,}8 \,.\, 1{,}2^2}{2 \,.\, 22{,}6} = 2{,}94$$

$$J_0 = \frac{1{,}2 \,.\, 10^3}{3} + \frac{8{,}8 \,.\, 1{,}2^3}{3} = 405$$

$$J_s = 405 - 22{,}6 \,.\, 2{,}94^2 = 209$$

Fig. 24.

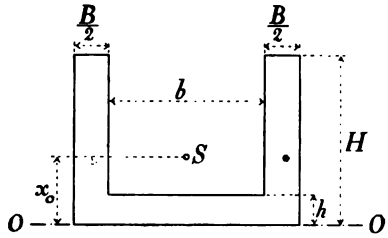
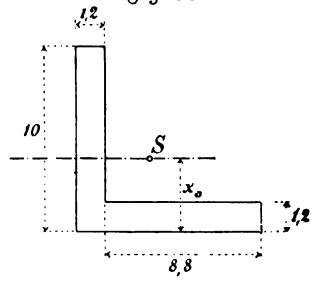



Fig. 25.




Für ein Dreieck A B C von der Grundlinie b und der Höhe h (Fig. 26) ergibt sich durch Auftragen der Abstände y von der durch die Spitze gelegten

Fig. 26.

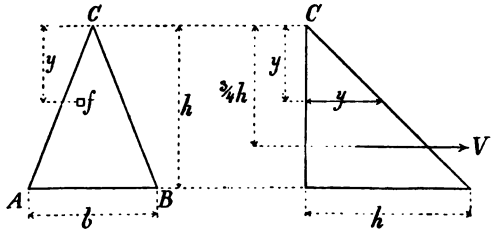
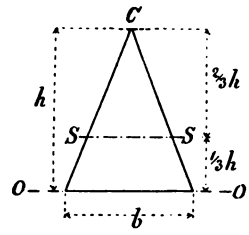



Fig. 27.




Achse C ( || A B) auf die zugehörigen Flächenteilchen f eine Pyramide. Die Grundfläche derselben ist = b h, die Höhe = h, folglich der Inhalt:

$$V = b\,h \,.\, \frac{h}{3} = \frac{b\,h^2}{3}$$

und der Abstand des Schwerpunktes derselben von der Achse C:

$$y_m = {}^3/_4\, h$$

Nach Gl. 10) S. 14 ist dann das Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf eine durch die Spitze C gelegte der Grundlinie parallele Achse bezw. Ebene:

$$J_c = V \,.\, y_m = \frac{b\,h^2}{3} \,.\, \frac{3}{4}\, h = \frac{b\,h^3}{4}$$

In Bezug auf die Schwerachse S S (Fig. 27) ist ferner nach Gl. 20) S. 20:

$$J_s = J_c - F\ (^2/_3\ h)^2$$

$$J_s = \frac{b\,h^3}{4} - \frac{b\,h}{2}\ (^2/_3\ h)^2 = \frac{b\,h^3}{36}$$

und in Bezug auf die Achse O O:

$$J_o = J_s + F\ (^1/_3\ h)^2$$

$$J_o = \frac{b\,h^3}{36} + \frac{b\,h}{2}\ (^1/_3\ h)^2 = \frac{b\,h^3}{12}$$

Ein Kreis kann angesehen werden als bestehend aus sehr vielen Dreiecken, deren Spitzen mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammenfallen und deren sehr kleine Grundlinien b auf dem Kreisumfange liegen. Ist r der Halbmesser des Kreises, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Dreiecks in Bezug auf den Mittelpunkt C

$$\frac{b\,r^3}{4}$$

und die Summe der Trägheitsmomente aller dieser Dreiecke, d. i. das Trägheitsmoment des ganzen Kreises:

$$J_c = \frac{r^3}{4}\,\Sigma\,(b)$$

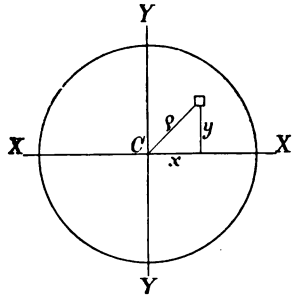
Da aber $\Sigma\,(b)$ gleich dem Umfang des Kreises, $= 2\,r\,\pi$ ist, so wird:

$$J_c = \frac{r^3}{4} \cdot 2\,r\,\pi = \frac{r^4\,\pi}{2}$$

Führt man den Durchmesser d ein, setzt also $r = \frac{d}{2}$, so erhält man für das Trägheitsmoment des Kreises in Bezug auf die durch den Mittelpunkt gelegte rechtwinklig zur Bildfläche stehende Achse, d. i. für das polare oder zentrale Trägheitsmoment des Kreises den Ausdruck:

$$\mathbf{J_c = \frac{d^4\,\pi}{32}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

Fig. 28.




Zieht man (Fig. 28) durch den Mittelpunkt des Kreises zwei rechtwinklig aufeinander stehende Durchmesser X X und Y Y, und ist $\rho$ der Abstand eines Flächenteilchens f vom Mittelpunkt, so ist das Trägheitsmoment dieses Flächenteilchens in Bezug auf die winkelrecht zur Bildfläche stehende Achse C

$$f\,\rho^2 = f\,x^2 + f\,y^2$$

Für die Summe aller Flächenteilchen wird dann:

$$\Sigma\,(f\,\rho^2) = \Sigma\,(f\,x^2) + \Sigma\,(f\,y^2)$$

oder:

$$J_c = J_y + J_x$$

Da der Kreis eine nach allen Seiten hin symmetrische Figur ist, so ist:

$$J_y = J_x = J$$

folglich:

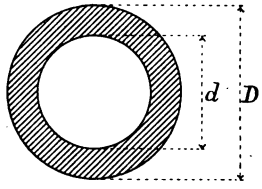
$$J_c = 2\,J$$

Das Trägheitsmoment des Kreises in Bezug auf einen Durchmesser ist danach:

$$\mathbf{J = \frac{J_c}{2} = \frac{d^4 \pi}{64}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

Die Ringfläche Fig. 29 kann angesehen werden als Differenz zweier Kreise von den Durchmessern D und d, folglich ist das Trägheitsmoment derselben:

Fig. 29.




$$\mathbf{J = \frac{(D^4 - d^4)\,\pi}{64}} \quad \ldots \quad 24)$$

Die Widerstandsmomente der verschiedenen Querschnitte ergeben sich nach Gl. 15) S. 17, wenn man die auf die Schwerachse bezogenen Trägheitsmomente durch den Abstand e der äußersten Faser von der neutralen Faser dividiert.

Für das Rechteck b × h ist $e = \frac{h}{2}$, folglich ist das Widerstandsmoment:

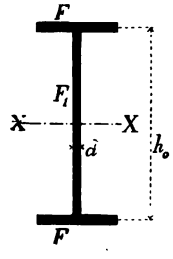
$$\mathbf{W = \frac{b\,h^2}{6}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

Für den Kreis vom Durchmesser d ist $e = \frac{d}{2}$, daher:

$$\mathbf{W = \frac{d^3 \pi}{32}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

Bei den Querschnitten Fig. 22 bis 27 haben, da hier $e_1$ nicht $= e_2$ ist, die Widerstandsmomente für die untere und obere Kante verschiedene Werte.

Fig. 30.




Für das Widerstandsmoment der I-Querschnitte läßt sich ein Annäherungsausdruck aufstellen, welcher zu der vorläufigen Berechnung genieteter Träger vielfach gute Dienste leistet. Bedeutet (Fig. 30):

F die Querschnittsfläche eines Flantsches bezw. einer Gurtung,

$F_1$ die Querschnittsfläche des Steges oder Stehbleches,

$h_0$ den Abstand der Schwerpunkte der Flantschen oder Gurtungen,

so ist in Bezug auf die wagerechte Schwerachse X X das Trägheitsmoment der beiden Flantschen (oder Gurtungen) angenähert:

$$J_1 = 2\,F \left(\frac{h_0}{2}\right)^2 = \frac{F\,h_0^2}{2}$$

und das Trägheitsmoment des Steges:

$$J_2 = \frac{d\,h_o^3}{12} = \frac{F_1\,h_o^2}{12}$$

folglich das Gesamtträgheitsmoment:

$$J = J_1 + J_2 = \frac{h_o^2}{2}\left(F + {}^1/_6\,F_1\right)$$

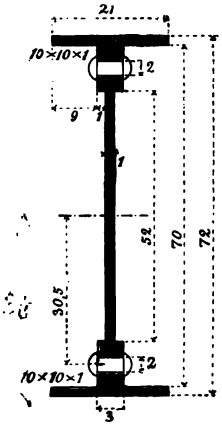
woraus sich durch Division mit $\frac{h_o}{2}$ das Widerstandsmoment ergibt:

$$W = h_o\,(F + {}^1/_6\,F_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

Die Gleichung ist bei gegebenem W, $h_o$ und d für F aufzulösen, und es sind danach die erforderlichen Walzeisen zu bestimmen.

Aufgabe 15. Das Widerstandsmoment eines aus Stehblech uud Winkeleisen zusammengesetzten Trägerquerschnittes soll W = 2900 betragen, die ganze Trägerhöhe sei h = 72 cm und danach schätzungsweise $h_o$ = 66 cm. Die Stärke des Stehbleches ist d = 1 cm. Es sollen die erforderlichen Winkeleisen berechnet werden.

Fig. 31.




Auflösung. Die Querschnittsfläche des Stehbleches ist angenähert:

$$F_1 = d\,h_o = 1 \cdot 66 = 66 \text{ qcm}$$

daher nach Gl. 27)

$$2900 = 66\,(F + {}^1/_6 \cdot 66)$$

woraus folgt:

$$F = \frac{2900}{66} - 11 = 33 \text{ qcm}$$

Jeder der beiden Winkel einer Gurtung erfordert danach den Nutzquerschnitt $^1/_2$ F = 16,5 qcm und bei Nieten von 2 cm Durchmesser den Gesamtquerschnitt:

$$f = 16{,}5 + 2 \cdot 1 = 18{,}5 \text{ qcm}$$

Dafür genügt der Winkel 10 × 10 × 1 cm mit f = 19 qcm

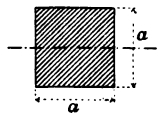
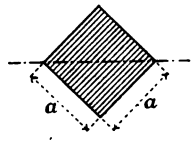
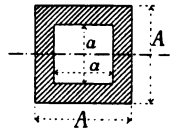
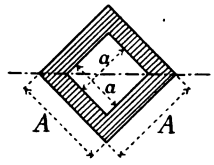
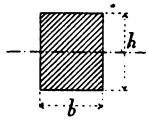
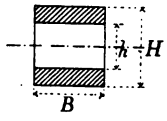
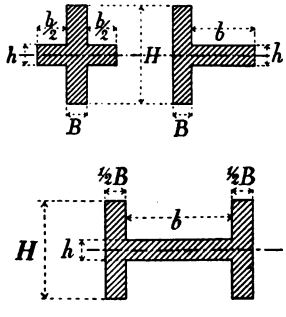
Für diesen Querschnitt (Fig. 31), welcher als Differenz von Rechtecken betrachtet werden kann, ergibt sich genau:

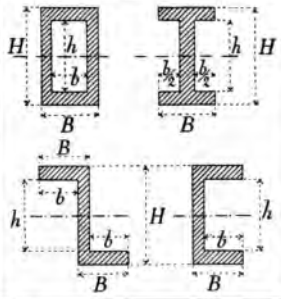
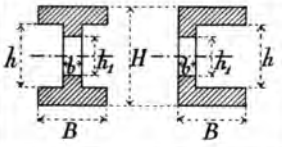
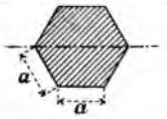
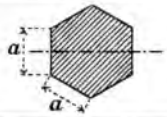
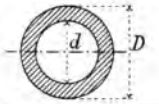
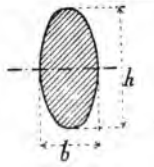
$$J = \frac{21 \cdot 72^3 - 18 \cdot 70^3 - 2 \cdot 52^3}{12} - \underbrace{2 \cdot 6 \cdot 30{,}5^2}_{\text{Nietabzug}} = 104\,086$$

folglich:

$$W = \frac{104\,086}{36} = 2891$$

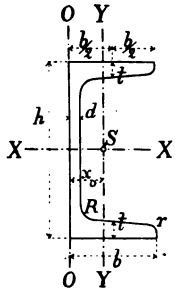
In der folgenden Tabelle sind die Trägheitsmomente und Widerstandsmomente für die wichtigsten und am häufigsten vorkommenden einfachen Querschnitte zusammengestellt.

| Nr. | Querschnittsform | Trägheitsmoment J | Widerstandsmoment W |
|---|---|---|---|
| 1 |   | $\frac{a^4}{12}$ | $\frac{a^3}{6}$ |
| 2 |   | $\frac{a^4}{12}$ | $\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$ |
| 3 |   | $\frac{A^4 - a^4}{12}$ | $\frac{A^4 - a^4}{6A}$ |
| 4 |   | $\frac{A^4 - a^4}{12}$ | $\frac{A^4 - a^4}{6\sqrt{2} \cdot A}$ |
| 5 |   | $\frac{bh^3}{12}$ | $\frac{bh^2}{6}$ |
| 6 |   | $\frac{B(H^3 - h^3)}{12}$ | $\frac{B(H^3 - h^3)}{6H}$ |
| 7 |   | $\frac{BH^3 + bh^3}{12}$ | $\frac{BH^3 + bh^3}{6H}$ |

| Nr. | Querschnittsform | Trägheitsmoment J | Widerstandsmoment W |
|---|---|---|---|
| 8 |  | $\frac{B H^3 - b h^3}{12}$ | $\frac{B H^3 - b h^3}{6 H}$ |
| 9 |  | $\frac{B(H^3-h^3)+b(h^3-h_1^3)}{12}$ | $\frac{B(H^3-h^3)+b(h^3-h_1^3)}{6 H}$ |
| 10 |  | $\frac{5\sqrt{3}}{16} a^4 = 0{,}5413\ a^4$ | $\frac{5}{8} a^3$ |
| 11 |  | $\frac{5\sqrt{3}}{16} a^4 = 0{,}5413\ a^4$ | $0{,}5413\ a^3$ |
| 12 | | $\frac{b h^3}{36}$ | $\frac{b h^2}{24}$ |
| 13 | | $\frac{d^4 \pi}{64}$ | $\frac{d^3 \pi}{32}$ |
| 14 |  | $\frac{(D^4 - d^4)\pi}{64}$ | $\frac{(D^4 - d^4)\pi}{32 D}$ |
| 15 |  | $\frac{b h^3 \pi}{64}$ | $\frac{b h^2 \pi}{32}$ |

## § 6.

# Tabellen der Trägheitsmomente und Widerstandsmomente verschiedener Profile*).




### 1. ⊏-Eisen

$b = 0{,}25\ h + 2{,}5$ cm

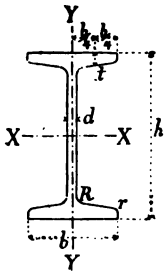
$R = t;\ r = 0{,}5\ t$

Neigung in Flantsch = 8 % (= 1 : 12½)

| Höhe h | Breite b | Dicke Steg d | Dicke Flantsch t | Fläche F qcm | Gewicht f. d. lfd. Meter in kg | Abstand des Schwerpunktes $x_o$ | Trägheitsmoment $J_x$ | $J_y$ | $J_o$ | Widerstandsmoment $W_x$ | $W_y$ | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3,3 | 0,5 | 0,7 | 5,44 | 4,24 | 1,31 | 6,39 | 5,33 | 14,7 | 4,26 | 2,68 | 3 |
| 4 | 3,5 | 0,5 | 0,7 | 6,21 | 4,85 | 1,33 | 14,1 | 6,68 | 17,7 | 7,10 | 3,08 | 4 |
| 5 | 3,8 | 0,5 | 0,7 | 7,12 | 5,55 | 1,37 | 26,4 | 9,12 | 22,6 | 10,6 | 3,75 | 5 |
| 6,5 | 4,2 | 0,55 | 0,75 | 9,03 | 7,05 | 1,42 | 57,5 | 14,1 | 32,3 | 17,7 | 5,06 | 6½ |
| 8 | 4,5 | 0,6 | 0,8 | 11,0 | 8,60 | 1,45 | 106 | 19,4 | 43,2 | 26,5 | 6,37 | 8 |
| 10 | 5,0 | 0,6 | 0,85 | 13,5 | 10,5 | 1,55 | 206 | 29,3 | 61,5 | 41,1 | 8,50 | 10 |
| 12 | 5,5 | 0,7 | 0,9 | 17,0 | 13,3 | 1,60 | 364 | 43,2 | 87,5 | 60,7 | 11,1 | 12 |
| 14 | 6,0 | 0,7 | 1,0 | 20,4 | 15,9 | 1,75 | 605 | 62,7 | 126 | 86,4 | 14,8 | 14 |
| 16 | 6,7 | 0,75 | 1,05 | 24,0 | 18,7 | 1,84 | 925 | 85,3 | 167 | 116 | 18,3 | 16 |
| 18 | 7,0 | 0,8 | 1,1 | 28,0 | 21,8 | 1,92 | 1354 | 114 | 217 | 150 | 22,4 | 18 |
| 20 | 7,5 | 0,85 | 1,15 | 32,2 | 25,1 | 2,01 | 1911 | 148 | 278 | 191 | 27,0 | 20 |
| 22 | 8,0 | 0,9 | 1,25 | 37,4 | 29,2 | 2,14 | 2690 | 197 | 369 | 245 | 33,6 | 22 |
| 24 | 8,5 | 0,95 | 1,3 | 42,3 | 33,0 | 2,23 | 3598 | 248 | 459 | 300 | 39,6 | 24 |
| 26 | 9,0 | 1,0 | 1,4 | 48,3 | 37,7 | 2,36 | 4823 | 317 | 586 | 371 | 47,8 | 26 |
| 28 | 9,5 | 1,0 | 1,5 | 53,3 | 41,6 | 2,53 | 6276 | 399 | 741 | 450 | 57,2 | 28 |
| 30 | 10 | 1,0 | 1,6 | 58,8 | 45,8 | 2,70 | 8026 | 495 | 924 | 535 | 67,8 | 30 |

*) Z. T. Auszug aus dem „Deutschen Normalprofilbuch für Walzeisen, 5. Aufl." mit Genehmigung der Herausgeber (Geh. Reg.-Räte und Professoren Dr. F. Heinzerling und O. Intze) und des Verlegers.

## 2. I-Eisen



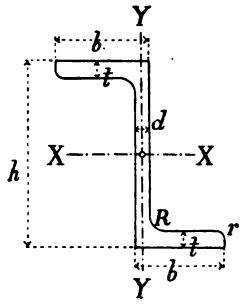

Für $h \leqq 25$ cm ist: $\begin{cases} b = 0{,}4\,h + 1 \text{ cm} \\ d = 0{,}03\,h + 0{,}15 \text{ cm} \end{cases}$

für $h > 25$ cm ist: $\begin{cases} b = 0{,}3\,h + 3{,}5 \text{ cm} \\ d = 0{,}036\,h \end{cases}$

$t = 1{,}5\,d$; $R = d$; $r = 0{,}6\,d$

Neigung im Flantsch $= 14\,\%$ $(= 1 : 7)$.

| Höhe h | Breite b | Dicke Steg d | Dicke Flantsch t | Fläche F qcm | Gewicht f. d. lfd. Meter in kg | Trägheitsmoment $J_x$ | Trägheitsmoment $J_y$ | Widerstandsmoment $W_x$ | Widerstandsmoment $W_y$ | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 4,2 | 0,39 | 0,59 | 7,57 | 5,91 | 77,7 | 6,28 | 19,4 | 2,99 | 8 |
| 9 | 4,6 | 0,42 | 0,63 | 8,99 | 7,02 | 117 | 8,76 | 25,9 | 3,81 | 9 |
| 10 | 5,0 | 0,45 | 0,68 | 10,6 | 8,28 | 170 | 12,2 | 34,1 | 4,86 | 10 |
| 11 | 5,4 | 0,48 | 0,72 | 12,3 | 9,59 | 238 | 16,2 | 43,3 | 5,99 | 11 |
| 12 | 5,8 | 0,51 | 0,77 | 14,2 | 11,1 | 327 | 21,4 | 54,5 | 7,38 | 12 |
| 13 | 6,2 | 0,54 | 0,81 | 16,1 | 12,6 | 435 | 27,4 | 67,0 | 8,85 | 13 |
| 14 | 6,6 | 0,57 | 0,86 | 18,2 | 14,2 | 572 | 35,2 | 81,7 | 10,7 | 14 |
| 15 | 7,0 | 0,60 | 0,90 | 20,4 | 15,9 | 734 | 43,7 | 97,9 | 12,5 | 15 |
| 16 | 7,4 | 0,63 | 0,95 | 22,8 | 17,8 | 933 | 54,5 | 117 | 14,7 | 16 |
| 17 | 7,8 | 0,66 | 0,99 | 25,2 | 19,7 | 1165 | 66,5 | 137 | 17,1 | 17 |
| 18 | 8,2 | 0,69 | 1,04 | 27,9 | 21,7 | 1444 | 81,3 | 161 | 19,8 | 18 |
| 19 | 8,6 | 0,72 | 1,08 | 30,5 | 23,8 | 1759 | 97,2 | 185 | 22,6 | 19 |
| 20 | 9,0 | 0,75 | 1,13 | 33,4 | 26,1 | 2139 | 117 | 214 | 25,9 | 20 |
| 21 | 9,4 | 0,78 | 1,17 | 36,3 | 28,3 | 2558 | 137 | 244 | 29,3 | 21 |
| 22 | 9,8 | 0,81 | 1,22 | 39,5 | 30,8 | 3055 | 163 | 278 | 33,3 | 22 |
| 23 | 10,2 | 0,84 | 1,26 | 42,6 | 33,3 | 3605 | 188 | 314 | 36,9 | 23 |
| 24 | 10,6 | 0,87 | 1,31 | 46,1 | 35,9 | 4239 | 220 | 353 | 41,6 | 24 |
| 25 | 11,0 | 0,90 | 1,36 | 49,7 | 38,7 | 4954 | 255 | 396 | 46,4 | 25 |
| 26 | 11,3 | 0,94 | 1,41 | 53,3 | 41,6 | 5735 | 287 | 441 | 50,6 | 26 |
| 27 | 11,6 | 0,97 | 1,47 | 57,1 | 44,5 | 6623 | 325 | 491 | 56,0 | 27 |
| 28 | 11,9 | 1,01 | 1,52 | 61,0 | 47,6 | 7575 | 363 | 541 | 60,8 | 28 |
| 29 | 12,2 | 1,04 | 1,57 | 64,8 | 50,6 | 8619 | 403 | 594 | 66,1 | 29 |
| 30 | 12,5 | 1,08 | 1,62 | 69,0 | 53,8 | 9785 | 449 | 652 | 71,9 | 30 |
| 32 | 13,1 | 1,15 | 1,73 | 77,7 | 60,6 | 12493 | 554 | 781 | 84,6 | 32 |
| 34 | 13,7 | 1,22 | 1,83 | 86,7 | 67,6 | 15670 | 672 | 922 | 98,1 | 34 |
| 36 | 14,3 | 1,30 | 1,95 | 97,0 | 75,7 | 19576 | 817 | 1088 | 114 | 36 |
| 38 | 14,9 | 1,37 | 2,05 | 107 | 83,4 | 23978 | 972 | 1262 | 131 | 38 |
| 40 | 15,5 | 1,44 | 2,16 | 118 | 91,8 | 29173 | 1160 | 1459 | 150 | 40 |
| 42,5 | 16,3 | 1,53 | 2,30 | 132 | 103 | 36956 | 1433 | 1739 | 176 | 42½ |
| 45 | 17,0 | 1,62 | 2,43 | 147 | 115 | 45888 | 1722 | 2040 | 203 | 45 |
| 47,5 | 17,8 | 1,71 | 2,56 | 163 | 127 | 56410 | 2084 | 2375 | 234 | 47½ |
| 50 | 18,5 | 1,80 | 2,70 | 179 | 140 | 68736 | 2470 | 2750 | 267 | 50 |
| 55 | 20,0 | 1,90 | 3,00 | 212 | 166 | 99054 | 3486 | 3602 | 349 | 55 |




### 3. Z-Eisen

$b = 0{,}25\ h + 3$ cm

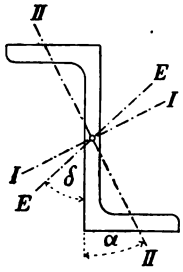
$d = 0{,}035\ h + 0{,}3$ cm

$t = 0{,}05\ h + 0{,}3$ cm

Die Dicke d ist auf halbe Millimeter abgerundet.

$R = t;\ r = 0{,}5\ t$

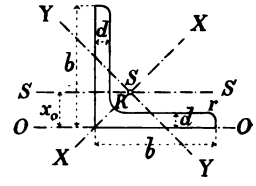
| Höhe h | Breite b | Dicke Steg d | Dicke Flantsch t | Fläche F qcm | Gewicht f. d. lfd. Meter in kg | Trägheitsmoment $J_x$ | Trägheitsmoment $J_y$ | Widerstandsmoment $W_x$ | Widerstandsmoment $W_y$ | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3,8 | 0,4 | 0,45 | 4,32 | 3,37 | 6,0 | 13,7 | 4,00 | 3,80 | 3 |
| 4 | 4,0 | 0,45 | 0,5 | 5,43 | 4,23 | 13,5 | 17,6 | 6,75 | 4,66 | 4 |
| 5 | 4,3 | 0,5 | 0,55 | 6,77 | 5,28 | 26,3 | 23,8 | 10,5 | 5,88 | 5 |
| 6 | 4,5 | 0,5 | 0,6 | 7,91 | 6,17 | 44,7 | 30,1 | 14,9 | 7,08 | 6 |
| 8 | 5,0 | 0,6 | 0,7 | 11,1 | 8,67 | 109 | 47,4 | 27,3 | 10,1 | 8 |
| 10 | 5,5 | 0,65 | 0,8 | 14,5 | 11,3 | 222 | 72,4 | 44,4 | 14,0 | 10 |
| 12 | 6,5 | 0,7 | 0,9 | 18,2 | 14,2 | 402 | 106 | 67,0 | 18,8 | 12 |
| 14 | 6,5 | 0,8 | 1,0 | 22,9 | 17,9 | 676 | 148 | 96,6 | 24,3 | 14 |
| 16 | 7,0 | 0,85 | 1,1 | 27,5 | 21,5 | 1059 | 204 | 132 | 31,0 | 16 |
| 18 | 7,5 | 0,95 | 1,2 | 33,3 | 26,0 | 1598 | 271 | 178 | 38,6 | 18 |
| 20 | 8,0 | 1,0 | 1,3 | 38,7 | 30,2 | 2298 | 358 | 230 | 47,7 | 20 |




Trägheits- und Widerstandsmomente der Z-Eisen bezogen auf die Hauptachsen.

| Nr. | tg α | Trägheitsmoment $J_I$ | Trägheitsmoment $J_{II}$ | Widerstandsmoment $W_I$ | Widerstandsmoment $W_{II}$ | Ungünstigste Belastung in der Ebene EE $W_{min}$ | Ungünstigste Belastung in der Ebene EE tg δ | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1,655 | 18,1 | 1,54 | 4,69 | 1,11 | 1,11 | 0,554 | 3 |
| 4 | 1,181 | 28,0 | 3,05 | 6,72 | 1,83 | 1,82 | 0,729 | 4 |
| 5 | 0,939 | 44,9 | 5,23 | 9,76 | 2,76 | 2,75 | 0,869 | 5 |
| 6 | 0,779 | 67,2 | 7,60 | 13,5 | 3,73 | 3,70 | 1,03 | 6 |
| 8 | 0,588 | 142 | 14,7 | 24,4 | 6,44 | 6,37 | 3,35 | 8 |
| 10 | 0,492 | 270 | 24,6 | 39,8 | 9,26 | 9,05 | 3,97 | 10 |
| 12 | 0,433 | 470 | 37,7 | 60,6 | 12,5 | 12,3 | 4,46 | 12 |
| 14 | 0,385 | 768 | 56,4 | 88,0 | 16,6 | 16,4 | 5,09 | 14 |
| 16 | 0,357 | 1184 | 79,5 | 121 | 21,4 | 21,1 | 5,48 | 16 |
| 18 | 0,329 | 1759 | 110 | 164 | 27,0 | 26,7 | 5,98 | 18 |
| 20 | 0,313 | 2509 | 147 | 213 | 33,4 | 33,1 | 6,26 | 20 |

## 4. Gleichschenklige Winkeleisen




Für b von 4 bis 10 cm ist:
$$\begin{cases} d_{min} = 0{,}1\ b \\ d = 0{,}1\ b + 0{,}2\ cm \\ d_{max} = 0{,}1\ b + 0{,}4\ cm \end{cases}$$

für $b > 10$ cm ist:
$$\begin{cases} d_{min} = 0{,}1\ b - 0{,}1\ cm \\ d = 0{,}1\ b + 0{,}1\ cm \\ d_{max} = 0{,}1\ b + 0{,}3\ cm \end{cases}$$

Die Schenkelbreite b ist dabei nach vollen Centimetern abgerundet.

$$R = \frac{d_{min} + d_{max}}{2};\quad r = \frac{R}{2}$$

| Breite b | Dicke d | Fläche F qcm | Gewicht f. d. lfd. Meter in kg | Abstand des Schwerpunktes $x_o$ | Trägheitsmoment $J_o$ | Trägheitsmoment $J_s$ | Trägheitsmoment $J_x = max$ | Trägheitsmoment $J_y = min$ | Widerstandsmoment $W_s$ | Widerstandsmoment $W_x = max$ | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,5 | 0,3 | 0,82 | 0,64 | 0,48 | 0,33 | 0,15 | 0,24 | 0,06 | 0,15 | 0,23 | 1½ |
| | 0,4 | 1,05 | 0,82 | 0,51 | 0,46 | 0,19 | 0,29 | 0,08 | 0,19 | 0,28 | |
| 2,0 | 0,3 | 1,12 | 0,87 | 0,60 | 0,79 | 0,39 | 0,62 | 0,15 | 0,28 | 0,44 | 2 |
| | 0,4 | 1,45 | 1,13 | 0,64 | 1,07 | 0,48 | 0,77 | 0,19 | 0,36 | 0,55 | |
| 2,5 | 0,3 | 1,42 | 1,11 | 0,73 | 1,54 | 0,79 | 1,27 | 0,31 | 0,45 | 0,72 | 2½ |
| | 0,4 | 1,85 | 1,44 | 0,76 | 2,08 | 1,01 | 1,61 | 0,40 | 0,58 | 0,91 | |
| 3,0 | 0,4 | 2,27 | 1,77 | 0,89 | 3,55 | 1,81 | 2,85 | 0,76 | 0,86 | 1,35 | 3 |
| | 0,6 | 3,27 | 2,55 | 0,96 | 5,48 | 2,48 | 3,91 | 1,06 | 1,22 | 1,84 | |
| 3,5 | 0,4 | 2,67 | 2,08 | 1,00 | 5,63 | 2,96 | 4,68 | 1,24 | 1,19 | 1,90 | 3½ |
| | 0,6 | 3,87 | 3,02 | 1,08 | 8,65 | 4,13 | 6,50 | 1,77 | 1,71 | 2,63 | |
| 4,0 | 0,4 | 3,08 | 2,40 | 1,12 | 8,33 | 4,47 | 7,09 | 1,86 | 1,56 | 2,50 | 4 |
| | 0,6 | 4,48 | 3,49 | 1,20 | 12,8 | 6,35 | 9,98 | 2,67 | 2,26 | 3,52 | |
| | 0,8 | 5,80 | 4,52 | 1,28 | 17,4 | 7,90 | 12,4 | 3,38 | 2,90 | 4,38 | |
| 4,5 | 0,5 | 4,30 | 3,36 | 1,28 | 14,9 | 7,85 | 12,4 | 3,25 | 2,44 | 3,91 | 4½ |
| | 0,7 | 5,86 | 4,57 | 1,36 | 21,3 | 10,4 | 16,4 | 4,39 | 3,32 | 5,16 | |
| | 0,9 | 7,34 | 5,73 | 1,44 | 27,8 | 12,6 | 19,8 | 5,40 | 4,13 | 6,24 | |
| 5,0 | 0,5 | 4,80 | 3,75 | 1,40 | 20,4 | 11,0 | 17,4 | 4,59 | 3,05 | 4,91 | 5 |
| | 0,7 | 6,56 | 5,12 | 1,49 | 29,0 | 14,6 | 23,1 | 6,02 | 4,15 | 6,53 | |
| | 0,9 | 8,24 | 6,43 | 1,56 | 38,0 | 17,9 | 28,1 | 7,67 | 5,20 | 7,94 | |
| 5,5 | 0,6 | 6,31 | 4,92 | 1,56 | 32,8 | 17,3 | 27,4 | 7,24 | 4,40 | 7,04 | 5½ |
| | 0,8 | 8,23 | 6,42 | 1,64 | 44,3 | 22,1 | 34,8 | 9,35 | 5,75 | 8,96 | |
| | 1,0 | 10,07 | 7,85 | 1,72 | 56,0 | 26,4 | 41,4 | 11,3 | 6,95 | 10,6 | |
| 6,0 | 0,6 | 6,91 | 5,39 | 1,69 | 42,5 | 22,8 | 36,1 | 9,43 | 5,30 | 8,51 | 6 |
| | 0,8 | 9,03 | 7,04 | 1,77 | 57,5 | 29,2 | 46,1 | 12,1 | 6,90 | 10,9 | |
| | 1,0 | 11,07 | 8,63 | 1,85 | 72,8 | 34,9 | 55,1 | 14,6 | 8,40 | 13,0 | |

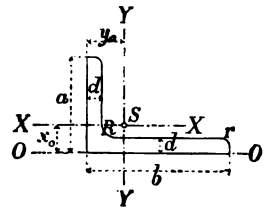
| Breite b | Dicke d | Fläche F qcm | Gewicht f. d. lfd. Meter in kg | Abstand des Schwerpunktes $x_o$ | Trägheitsmoment $J_o$ | $J_s$ | $J_x$ = max | $J_y$ = min | Widerstandsmoment $W_s$ | $W_x$ = max | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,7 | 8,70 | 6,79 | 1,85 | 63,0 | 33,4 | 53,0 | 13,8 | 7,20 | 11,5 | |
| 6,5 | 0,9 | 10,98 | 8,56 | 1,93 | 82,3 | 41,3 | 65,4 | 17,2 | 9,05 | 14,2 | 6½ |
| | 1,1 | 13,17 | 10,30 | 2,00 | 102,0 | 48,8 | 76,8 | 20,7 | 10,85 | 16,7 | |
| | 0,7 | 9,4 | 7,33 | 1,97 | 78,8 | 42,3 | 67,1 | 17,6 | 8,40 | 13,6 | |
| 7,0 | 0,9 | 11,9 | 9,26 | 2,05 | 103 | 52,5 | 83,1 | 22,0 | 10,6 | 16,8 | 7 |
| | 1,1 | 14,3 | 11,13 | 2,13 | 127 | 62,0 | 97,6 | 26,0 | 12,7 | 19,7 | |
| | 0,8 | 11,5 | 8,94 | 2,13 | 111 | 59,0 | 93,3 | 24,4 | 11,0 | 17,6 | |
| 7,5 | 1,0 | 14,1 | 11,00 | 2,21 | 140 | 71,0 | 113 | 29,8 | 13,5 | 21,3 | 7½ |
| | 1,2 | 16,7 | 13,00 | 2,29 | 170 | 82,5 | 130 | 34,7 | 15,9 | 24,6 | |
| | 0,8 | 12,3 | 9,57 | 2,26 | 135 | 72,0 | 115 | 29,6 | 12,6 | 20,3 | |
| 8,0 | 1,0 | 15,1 | 11,78 | 2,34 | 170 | 87,5 | 139 | 35,9 | 15,5 | 24,5 | 8 |
| | 1,2 | 17,9 | 13,94 | 2,41 | 206 | 102 | 161 | 43,0 | 18,2 | 28,4 | |
| | 0,9 | 15,5 | 12,1 | 2,54 | 216 | 116 | 184 | 47,8 | 18,0 | 28,9 | |
| 9,0 | 1,1 | 18,7 | 14,6 | 2,62 | 266 | 138 | 218 | 57,1 | 21,6 | 34,3 | 9 |
| | 1,3 | 21,8 | 17,0 | 2,70 | 317 | 158 | 250 | 65,9 | 25,1 | 39,3 | |
| | 1,0 | 19,2 | 14,9 | 2,82 | 329 | 177 | 280 | 73,3 | 24,7 | 39,7 | |
| 10 | 1,2 | 22,7 | 17,7 | 2,90 | 398 | 207 | 328 | 86,2 | 29,2 | 46,3 | 10 |
| | 1,4 | 26,2 | 20,4 | 2,98 | 468 | 235 | 372 | 98,3 | 33,5 | 52,6 | |
| | 1,0 | 21,2 | 16,5 | 3,07 | 438 | 239 | 379 | 98,6 | 30,1 | 48,7 | |
| 11 | 1,2 | 25,1 | 19,6 | 3,15 | 530 | 280 | 444 | 116 | 35,7 | 57,1 | 11 |
| | 1,4 | 29,0 | 22,6 | 3,21 | 622 | 319 | 505 | 133 | 41,0 | 64,8 | |
| | 1,1 | 25,4 | 19,8 | 3,36 | 626 | 340 | 541 | 140 | 39,4 | 63,8 | |
| 12 | 1,3 | 29,7 | 23,2 | 3,44 | 745 | 394 | 625 | 162 | 46,1 | 73,7 | 12 |
| | 1,5 | 33,9 | 26,5 | 3,51 | 864 | 446 | 705 | 186 | 52,5 | 83,2 | |
| | 1,2 | 30,0 | 23,4 | 3,64 | 869 | 472 | 750 | 194 | 50,5 | 81,6 | |
| 13 | 1,4 | 34,7 | 27,0 | 3,72 | 1020 | 540 | 857 | 223 | 58,0 | 93,3 | 13 |
| | 1,6 | 39,3 | 30,6 | 3,80 | 1171 | 605 | 959 | 251 | 65,5 | 104 | |
| | 1,3 | 35,0 | 27,3 | 3,92 | 1176 | 638 | 1014 | 262 | 63,5 | 102 | |
| 14 | 1,5 | 40,0 | 31,2 | 4,00 | 1364 | 723 | 1148 | 298 | 72,5 | 116 | 14 |
| | 1,7 | 45,0 | 35,1 | 4,08 | 1554 | 805 | 1276 | 334 | 81,0 | 129 | |
| | 1,4 | 40,3 | 31,4 | 4,2 | 1559 | 845 | 1343 | 347 | 78,5 | 127 | |
| 15 | 1,6 | 45,7 | 35,7 | 4,3 | 1790 | 949 | 1507 | 391 | 88,5 | 142 | 15 |
| | 1,8 | 51,0 | 39,9 | 4,4 | 2023 | 1052 | 1665 | 438 | 99,0 | 157 | |
| | 1,5 | 46,1 | 35,9 | 4,5 | 2028 | 1099 | 1745 | 453 | 95,5 | 154 | |
| 16 | 1,7 | 51,8 | 40,4 | 4,6 | 2308 | 1226 | 1945 | 506 | 107 | 172 | 16 |
| | 1,9 | 57,5 | 44,9 | 4,7 | 2591 | 1348 | 2137 | 558 | 119 | 189 | |

## 5. Ungleichschenklige Winkeleisen

$$d_{min} = 0{,}1\,\frac{a+b}{2} \quad \text{(annähernd)}$$

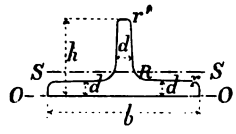
$$R = \frac{d_{min} + d_{max}}{2};\quad r = \frac{R}{2}$$

(r ist auf halbe mm abgerundet)




| Verhältnis | Breite a | Breite b | Dicke d | Fläche F qcm | Gewicht f. d. lfd. Meter in kg | Abstand des Schwerpunktes $x_o$ | Abstand des Schwerpunktes $y_o$ | Trägheitsmoment $J_o$ | Trägheitsmoment $J_x$ | Trägheitsmoment $J_y$ | Widerstandsmoment $W_x$ | Widerstandsmoment $W_y$ | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a : b = 2 : 3 | 2 | 3 | 0,3 | 1,42 | 1,11 | 0,49 | 0,99 | 0,79 | 0,45 | 1,25 | 0,30 | 0,62 | 2/3 |
| | | | 0,4 | 1,85 | 1,44 | 0,54 | 1,03 | 1,08 | 0,54 | 1,60 | 0,37 | 0,81 | |
| | 3 | 4,5 | 0,4 | 2,87 | 2,24 | 0,74 | 1,48 | 3,63 | 2,05 | 5,77 | 0,91 | 1,91 | 3/4½ |
| | | | 0,5 | 3,53 | 2,75 | 0,78 | 1,52 | 4,61 | 2,46 | 6,99 | 1,11 | 2,35 | |
| | 4 | 6 | 0,5 | 4,79 | 3,74 | 0,97 | 1,95 | 10,7 | 6,20 | 17,3 | 2,05 | 4,27 | 4/6 |
| | | | 0,7 | 6,55 | 5,11 | 1,05 | 2,04 | 15,3 | 8,00 | 22,9 | 2,71 | 5,78 | |
| | 5 | 7,5 | 0,7 | 8,33 | 6,50 | 1,24 | 2,47 | 29,2 | 16,4 | 46,3 | 4,36 | 9,20 | 5/7½ |
| | | | 0,9 | 10,5 | 8,20 | 1,32 | 2,56 | 38,4 | 20,4 | 57,1 | 5,54 | 11,6 | |
| | 6,5 | 10 | 0,9 | 14,2 | 11,0 | 1,59 | 3,31 | 82,5 | 46,0 | 141 | 9,37 | 21,1 | 6½/10 |
| | | | 1,1 | 17,1 | 13,3 | 1,67 | 3,40 | 103 | 55,0 | 167 | 11,4 | 25,3 | |
| | 8 | 12 | 1,0 | 19,1 | 14,9 | 1,95 | 3,92 | 171 | 98,0 | 276 | 16,2 | 34,2 | 8/12 |
| | | | 1,2 | 22,7 | 17,7 | 2,02 | 4,00 | 208 | 115 | 323 | 19,2 | 40,4 | |
| | 10 | 15 | 1,2 | 28,7 | 22,4 | 2,42 | 4,89 | 400 | 232 | 649 | 30,6 | 64,2 | 10/15 |
| | | | 1,4 | 33,2 | 25,9 | 2,50 | 4,97 | 471 | 264 | 743 | 35,2 | 74,1 | |
| a : b = 1 : 2 | 2 | 4 | 0,3 | 1,72 | 1,34 | 0,44 | 1,43 | 0,81 | 0,47 | 2,80 | 0,30 | 1,09 | 2/4 |
| | | | 0,4 | 2,25 | 1,76 | 0,48 | 1,47 | 1,12 | 0,60 | 3,58 | 0,40 | 1,42 | |
| | 3 | 6 | 0,5 | 4,29 | 3,35 | 0,68 | 2,15 | 4,59 | 2,61 | 15,6 | 1,13 | 4,05 | 3/6 |
| | | | 0,7 | 5,85 | 4,56 | 0,76 | 2,24 | 6,80 | 3,41 | 20,7 | 1,52 | 5,51 | |
| | 4 | 8 | 0,6 | 6,89 | 5,37 | 0,88 | 2,85 | 13,0 | 7,63 | 45,0 | 2,45 | 8,74 | 4/8 |
| | | | 0,8 | 9,01 | 7,03 | 0,96 | 2,94 | 18,0 | 9,65 | 57,6 | 3,17 | 11,4 | |
| | 5 | 10 | 0,8 | 11,5 | 8,93 | 1,12 | 3,59 | 34,0 | 19,6 | 116 | 5,05 | 18,1 | 5/10 |
| | | | 1,0 | 14,1 | 11,0 | 1,20 | 3,67 | 43,9 | 22,9 | 142 | 6,03 | 22,4 | |
| | 6,5 | 13 | 1,0 | 18,6 | 14,5 | 1,45 | 4,65 | 93,5 | 54,2 | 320 | 10,7 | 38,3 | 6½/13 |
| | | | 1,2 | 22,1 | 17,2 | 1,53 | 4,75 | 115 | 62,9 | 373 | 12,7 | 45,2 | |
| | 8 | 16 | 1,2 | 27,5 | 21,5 | 1,77 | 5,72 | 209 | 122 | 719 | 19,6 | 69,9 | 8/16 |
| | | | 1,4 | 31,8 | 24,8 | 1,85 | 5,81 | 248 | 135 | 826 | 22,0 | 81,1 | |
| | 10 | 20 | 1,4 | 40,3 | 31,4 | 2,18 | 7,12 | 474 | 282 | 1654 | 36,1 | 128 | 10/20 |
| | | | 1,6 | 45,7 | 35,6 | 2,26 | 7,20 | 549 | 316 | 1862 | 40,8 | 145 | |

## 6. Breitfüßige ⊥-Eisen




$$d = 0{,}15\ h + 0{,}1\ cm$$

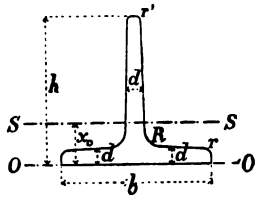
$$b : h = 2 : 1$$

$$R = d;\ r = \frac{d}{2};\ r' = \frac{d}{4}$$

Neigung im Fuß = 2% (= 1 : 50)
Neigung im Steg = 4% (= 1 : 25)

| Breite b | Höhe h | Dicke d | Fläche F qcm | Gewicht f. d. lfd. Meter in kg | Abstand des Schwerpunktes $x_o$ | Trägheitsmoment $J_o$ | Trägheitsmoment $J_s$ | Widerstandsmoment $W_s$ | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 0,55 | 4,64 | 3,62 | 0,67 | 4,70 | 2,58 | 1,11 | 6/3 |
| 7 | 3,5 | 0,6 | 5,94 | 4,63 | 0,77 | 8,00 | 4,49 | 1,65 | 7/3½ |
| 8 | 4 | 0,7 | 7,91 | 6,17 | 0,88 | 14,0 | 7,81 | 2,50 | 8/4 |
| 9 | 4,5 | 0,8 | 10,2 | 7,93 | 1,00 | 23,0 | 12,7 | 3,64 | 9/4½ |
| 10 | 5 | 0,85 | 12,0 | 9,38 | 1,09 | 33,1 | 18,7 | 4,78 | 10/5 |
| 12 | 6 | 1,0 | 17,0 | 13,2 | 1,30 | 66,5 | 38,0 | 8,09 | 12/6 |
| 14 | 7 | 1,15 | 22,8 | 17,8 | 1,51 | 121 | 68,9 | 12,6 | 14/7 |
| 16 | 8 | 1,3 | 29,5 | 23,0 | 1,72 | 204 | 117 | 18,6 | 16/8 |
| 18 | 9 | 1,45 | 37,0 | 28,8 | 1,93 | 323 | 185 | 26,1 | 18/9 |
| 20 | 10 | 1,6 | 45,4 | 35,4 | 2,14 | 486 | 277 | 35,3 | 20/10 |

## 7. Hochstegige ⊥-Eisen




$$d = 0{,}1\ h + 0{,}1\ cm$$

$$b : h = 1 : 1$$

$$R = d;\ r = \frac{d}{2};\ r' = \frac{d}{4}$$

Neigung im Fuß und Steg = 2% (= 1 : 50)

| Breite b | Höhe h | Dicke d | Fläche F qcm | Gewicht f. d. lfd. Meter in kg | Abstand des Schwerpunktes $x_o$ | Trägheitsmoment $J_o$ | Trägheitsmoment $J_s$ | Widerstandsmoment $W_s$ | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 0,3 | 1,12 | 0,87 | 0,58 | 0,76 | 0,38 | 0,27 | 2/2 |
| 2,5 | 2,5 | 0,35 | 1,64 | 1,28 | 0,73 | 1,63 | 0,87 | 0,49 | 2½/2½ |
| 3 | 3 | 0,4 | 2,26 | 1,76 | 0,85 | 3,35 | 1,72 | 0,80 | 3/3 |
| 3,5 | 3,5 | 0,45 | 2,97 | 2,32 | 0,99 | 6,01 | 3,10 | 1,23 | 3½/3½ |
| 4 | 4 | 0,5 | 3,77 | 2,94 | 1,12 | 10,0 | 5,28 | 1,84 | 4/4 |
| 4,5 | 4,5 | 0,55 | 4,67 | 3,64 | 1,26 | 15,5 | 8,13 | 2,51 | 4½/4½ |
| 5 | 5 | 0,6 | 5,66 | 4,42 | 1,39 | 23,0 | 12,1 | 3,36 | 5/5 |
| 6 | 6 | 0,7 | 7,94 | 6,19 | 1,66 | 45,7 | 23,8 | 5,48 | 6/6 |
| 7 | 7 | 0,8 | 10,6 | 8,27 | 1,94 | 84,4 | 44,5 | 8,79 | 7/7 |
| 8 | 8 | 0,9 | 13,6 | 10,6 | 2,22 | 141 | 73,7 | 12,8 | 8/8 |
| 9 | 9 | 1,0 | 17,1 | 13,3 | 2,48 | 224 | 119 | 18,2 | 9/9 |
| 10 | 10 | 1,1 | 20,9 | 16,3 | 2,74 | 336 | 179 | 24,6 | 10/10 |
| 12 | 12 | 1,3 | 29,6 | 23,1 | 3,28 | 684 | 366 | 42,0 | 12/12 |
| 14 | 14 | 1,5 | 39,9 | 31,1 | 3,80 | 1236 | 660 | 64,7 | 14/14 |

### 8. Zores-Eisen (Belag-Eisen)

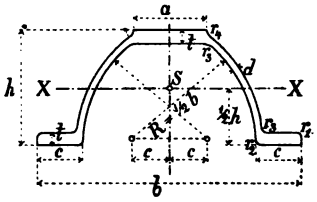
$a = 0{,}5\ h + 0{,}8$ cm $\quad r_1 = d$

$b = 2\ h + 2$ cm $\quad r_2 = d - 0{,}05$ cm

$c = 0{,}3\ h + 0{,}6$ cm $\quad r_3 = t$

$d = {}^1/_{30}\ h + 0{,}14$ cm $\quad r_4 = 0{,}6\ d + 0{,}13$ cm

$t = {}^1/_{15}\ h + 0{,}19$ cm



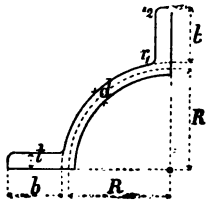

| Höhe h | Breite oben a | Breite unten b | Breite Fuß c | Dicke Steg d | Dicke Kopf u. Fuß t | Fläche F qcm | Gewicht f. d. lfd. Meter in kg | Trägheitsmoment $J_x$ | Widerstandsmoment $W_x$ | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3,3 | 12 | 2,1 | 0,3 | 0,5 | 6,71 | 5,24 | 23,2 | 9,27 | 5 |
| 6 | 3,8 | 14 | 2,4 | 0,35 | 0,6 | 9,34 | 7,28 | 47,2 | 15,8 | 6 |
| 7,5 | 4,55 | 17 | 2,85 | 0,4 | 0,7 | 13,2 | 10,3 | 105 | 27,9 | 7½ |
| 9 | 5,3 | 20 | 3,3 | 0,45 | 0,8 | 17,9 | 14,0 | 206 | 45,8 | 9 |
| 11 | 6,3 | 24 | 3,9 | 0,5 | 0,9 | 24,1 | 18,8 | 421 | 76,5 | 11 |

### 9. ⌐-Eisen (Quadrant-Eisen)

R = mittlerer Radius

$b = 0{,}2\ R + 2{,}5$ cm

$r_1 = 0{,}12\ R$; $r_2 = 0{,}06\ R$




| R | b | $r_1$ | d | t | Fläche F qcm | Gewicht f. d. lfd. Meter in kg | Trägheitsmoment J | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | der vollen Röhre | | | |
| 5 | 3,5 | 0,6 | 0,4 | 0,6 | 29,8 | 23,3 | 576 | 5 |
| | | | 0,8 | 0,8 | 48,0 | 37,4 | 906 | |
| 7,5 | 4,0 | 0,9 | 0,6 | 0,8 | 54,9 | 42,8 | 2068 | 7½ |
| | | | 1,0 | 1,0 | 80,2 | 62,5 | 2982 | |
| 10 | 4,5 | 1,2 | 0,8 | 1,0 | 88,1 | 68,7 | 5511 | 10 |
| | | | 1,2 | 1,2 | 120 | 94,0 | 7478 | |
| 12,5 | 5,0 | 1,5 | 1,0 | 1,2 | 129 | 101 | 12 161 | 12½ |
| | | | 1,4 | 1,4 | 169 | 132 | 15 788 | |
| 15 | 5,5 | 1,8 | 1,2 | 1,4 | 179 | 140 | 23 637 | 15 |
| | | | 1,8 | 1,7 | 249 | 194 | 32 738 | |

### 10. Handleisten-Eisen

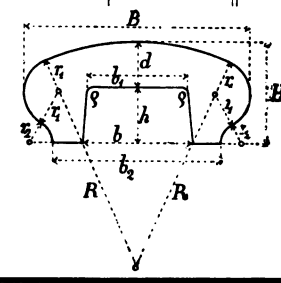
$R = B$ $\quad r_1 = 0{,}15\ B$

$H = 0{,}45\ B$ $\quad r_2 = 0{,}1\ B$

$d = 0{,}2\ B$ $\quad \rho = 0{,}05\ B$

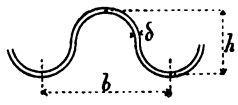
$b = 0{,}5\ B$ $\quad b_1 = 0{,}45\ B$

$h = 0{,}25\ B$ $\quad b_2 = 0{,}75\ B$




| B | H | b | h | d | $r_1$ | $r_2$ | ρ | $b_1$ | $b_2$ | Fläche F qcm | Gewicht f. d. lfd. Meter in kg | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1,8 | 2 | 1,0 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0,2 | 1,8 | 3,0 | 4,20 | 3,28 | 4 |
| 6 | 2,7 | 3 | 1,5 | 1,2 | 0,9 | 0,6 | 0,3 | 2,7 | 4,5 | 9,46 | 7,38 | 6 |
| 8 | 3,6 | 4 | 2,0 | 1,6 | 1,2 | 0,8 | 0,4 | 3,6 | 6,0 | 16,8 | 13,1 | 8 |
| 10 | 4,5 | 5 | 2,5 | 2,0 | 1,5 | 1,0 | 0,5 | 4,5 | 7,5 | 26,3 | 20,5 | 10 |
| 12 | 5,4 | 6 | 3,0 | 2,4 | 1,8 | 1,2 | 0,6 | 5,4 | 9,0 | 37,8 | 29,5 | 12 |

## 11. Wellbleche.




Das Widerstandsmoment für 1 m Breite ist annähernd:

$$W = \left(17 + 40\,\frac{h}{b}\right) h\,\delta$$

Das Gewicht für 1 qm bei 1 mm Dicke ist annähernd:

$$G = 7{,}8\left(2\,\frac{h}{b} + 0{,}57\right) \text{kg}$$

Der Querschnitt für 1 m Breite und 1 mm Dicke ist annähernd:

$$F = 10\left(2\,\frac{h}{b} + 0{,}57\right) \text{qcm}$$

| | $\frac{b}{h}$ | Wellenhöhe h | Wellenbreite b | Widerstandsmoment W für 1 m Breite und für δ = 0,075 | 0,1 | 0,125 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Flaches Wellblech | 2,5 | 2 | 5 | 5,0 | 6,6 | 8,3 | 9,9 | 13,2 | — | — |
| | | 4 | 10 | 10,4 | 13,8 | 17,3 | 20,7 | 27,6 | 34,5 | 41,4 |
| | | 6 | 15 | 15,5 | 20,6 | 25,8 | 30,9 | 41,2 | 51,5 | 61,8 |
| | | 8 | 20 | 20,6 | 27,5 | 34,4 | 41,3 | 55,0 | 68,8 | 82,5 |
| | | 10 | 25 | 25,8 | 34,4 | 43,0 | 51,6 | 68,8 | 86,0 | 103,2 |
| | | 12 | 30 | 31,0 | 41,3 | 51,6 | 62,0 | 82,6 | 103,3 | 123,9 |
| | 2,0 | 4 | 8 | 11,5 | 15,3 | 19,1 | 23,2 | 30,6 | 38,3 | 45,9 |
| | | 6 | 12 | 17,2 | 22,9 | 28,6 | 34,4 | 45,8 | 57,3 | 68,7 |
| | | 8 | 16 | 22,9 | 30,5 | 38,1 | 45,8 | 61,0 | 76,3 | 91,5 |
| | | 10 | 20 | 28,7 | 38,2 | 47,8 | 57,3 | 76,4 | 95,5 | 114,6 |
| | | 12 | 24 | 34,4 | 45,8 | 57,3 | 68,7 | 91,6 | 114,5 | 137,4 |
| Trägerwellblech | 1,5 | 4 | 6 | 13,4 | 17,8 | 22,3 | 26,7 | 35,6 | 44,5 | 53,4 |
| | | 6 | 9 | 20,0 | 26,6 | 33,3 | 39,9 | 53,2 | 66,5 | 79,8 |
| | | 8 | 12 | 26,6 | 35,5 | 44,4 | 53,3 | 71,0 | 88,8 | 106,5 |
| | | 10 | 15 | 33,3 | 44,4 | 55,5 | 66,6 | 88,8 | 111,0 | 133,2 |
| | | 12 | 18 | 40,0 | 53,3 | 66,6 | 79,7 | 106,6 | 133,3 | 159,9 |
| | 1,0 | 6 | 6 | 25,6 | 34,1 | 42,6 | 51,2 | 68,2 | 85,3 | 102,3 |
| | | 8 | 8 | 34,1 | 45,4 | 56,8 | 68,1 | 90,8 | 113,5 | 136,2 |
| | | 10 | 10 | 42,7 | 56,9 | 71,1 | 85,4 | 113,8 | 142,3 | 170,7 |
| | | 12 | 12 | 51,2 | 68,3 | 85,4 | 102,5 | 136,6 | 170,8 | 204,9 |

## 12. Eisenbahnschienen.

Je nach dem Profile der Schienen schwankt die Größe des Trägheitsmomentes und Widerstandsmomentes. Für 13 cm hohe Schienen kann man im Mittel annehmen:

$$J = 1000$$

$$W = 140$$

Für zwei aufeinander genietete Schienen ist etwa:

$$W = 420$$

## 13. Kreisförmiger Querschnitt.

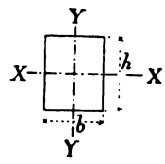
| Durchmesser d | Trägheitsmoment J | Widerstandsmoment W | Durchmesser d | Trägheitsmoment J | Widerstandsmoment W | Durchmesser d | Trägheitsmoment J | Widerstandsmoment W |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0491 | 0,0982 | 34 | 65 597 | 3859 | 67 | 989 166 | 29 527 |
| 2 | 0,7854 | 0,7854 | 35 | 73 662 | 4209 | 68 | 1 049 556 | 30 869 |
| 3 | 3,976 | 2,651 | 36 | 82 448 | 4580 | 69 | 1 112 660 | 32 251 |
| 4 | 12,57 | 6,283 | 37 | 91 998 | 4973 | | | |
| 5 | 30,68 | 12,27 | 38 | 102 354 | 5387 | **70** | 1 178 588 | 33 674 |
| 6 | 63,62 | 21,21 | 39 | 113 561 | 5824 | 71 | 1 247 393 | 35 138 |
| 7 | 117,9 | 33,67 | | | | 72 | 1 319 167 | 36 644 |
| 8 | 201,1 | 50,27 | **40** | 125 664 | 6283 | 73 | 1 393 995 | 38 192 |
| 9 | 322,1 | 71,57 | 41 | 138 709 | 6766 | 74 | 1 471 963 | 39 783 |
| | | | 42 | 152 745 | 7274 | 75 | 1 553 156 | 41 417 |
| **10** | 490,9 | 98,17 | 43 | 167 820 | 7806 | 76 | 1 637 662 | 43 096 |
| 11 | 718,7 | 130,7 | 44 | 183 984 | 8363 | 77 | 1 725 571 | 44 820 |
| 12 | 1018 | 169,6 | 45 | 201 289 | 8946 | 78 | 1 816 972 | 46 589 |
| 13 | 1402 | 215,7 | 46 | 219 787 | 9556 | 79 | 1 911 967 | 48 404 |
| 14 | 1886 | 269,4 | 47 | 239 531 | 10 193 | | | |
| 15 | 2485 | 331,3 | 48 | 260 576 | 10 857 | **80** | 2 010 619 | 50 265 |
| 16 | 3217 | 402,1 | 49 | 282 979 | 11 550 | 81 | 2 113 051 | 52 174 |
| 17 | 4100 | 482,3 | | | | 82 | 2 219 347 | 54 130 |
| 18 | 5153 | 572,6 | **50** | 306 796 | 12 270 | 83 | 2 329 605 | 56 135 |
| 19 | 6397 | 673,4 | 51 | 332 086 | 13 023 | 84 | 2 443 920 | 58 189 |
| | | | 52 | 358 908 | 13 804 | 85 | 2 562 392 | 60 292 |
| **20** | 7854 | 785,4 | 53 | 387 323 | 14 616 | 86 | 2 685 120 | 62 445 |
| 21 | 9547 | 909,2 | 54 | 417 393 | 15 459 | 87 | 2 812 205 | 64 648 |
| 22 | 11 499 | 1045 | 55 | 449 180 | 16 334 | 88 | 2 943 748 | 66 903 |
| 23 | 13 737 | 1194 | 56 | 482 750 | 17 241 | 89 | 3 079 853 | 69 210 |
| 24 | 16 286 | 1357 | 57 | 518 166 | 18 181 | | | |
| 25 | 19 175 | 1534 | 58 | 555 497 | 19 155 | **90** | 3 220 623 | 71 569 |
| 26 | 22 432 | 1726 | 59 | 594 810 | 20 163 | 91 | 3 366 165 | 73 982 |
| 27 | 26 087 | 1932 | | | | 92 | 3 516 586 | 76 448 |
| 28 | 30 172 | 2155 | **60** | 636 172 | 21 206 | 93 | 3 671 992 | 78 968 |
| 29 | 34 719 | 2394 | 61 | 679 651 | 22 284 | 94 | 3 832 492 | 81 542 |
| | | | 62 | 725 332 | 23 398 | 95 | 3 998 198 | 84 173 |
| **30** | 39 761 | 2651 | 63 | 773 272 | 24 548 | 96 | 4 169 220 | 86 859 |
| 31 | 45 333 | 2925 | 64 | 823 550 | 25 736 | 97 | 4 345 671 | 89 601 |
| 32 | 51 472 | 3217 | 65 | 876 240 | 26 961 | 98 | 4 527 664 | 92 401 |
| 33 | 58 214 | 3528 | 66 | 931 420 | 28 225 | 99 | 4 715 315 | 95 259 |

## 14. Ringförmiger Querschnitt

F = Querschnitt
J = Trägheitsmoment
W = Widerstandsmoment

| D cm | δ cm | F qcm | J cm⁴ | W cm³ | D cm | δ cm | F qcm | J cm⁴ | W cm³ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1,0 | 28,27 | 289,8 | 57,96 | 14 | 1,4 | 55,42 | 1113 | 159,0 |
| | 1,2 | 33,18 | 327,1 | 65,42 | | 1,6 | 62,33 | 1218 | 174,0 |
| | 1,4 | 37,83 | 359,0 | 71,79 | | 1,8 | 68,99 | 1311 | 187,4 |
| | 1,6 | 42,22 | 385,9 | 77,18 | | 2,0 | 75,40 | 1395 | 199,3 |
| | 1,8 | 46,37 | 408,5 | 81,70 | | 2,2 | 81,56 | 1469 | 209,9 |
| | 2,0 | 50,27 | 427,3 | 85,45 | | 2,4 | 87,46 | 1534 | 219,1 |
| | | | | | | 2,6 | 93,11 | 1591 | 227,3 |
| 11 | 1,2 | 36,95 | 450,2 | 81,85 | 15 | 1,4 | 59,82 | 1398 | 186,4 |
| | 1,4 | 42,22 | 496,7 | 90,31 | | 1,6 | 67,36 | 1533 | 204,4 |
| | 1,6 | 47,25 | 537,0 | 97,64 | | 1,8 | 74,65 | 1656 | 220,8 |
| | 1,8 | 52,02 | 571,5 | 103,9 | | 2,0 | 81,68 | 1766 | 235,5 |
| | 2,0 | 56,55 | 600,8 | 109,2 | | 2,2 | 88,47 | 1866 | 248,8 |
| | 2,2 | 60,82 | 625,6 | 113,8 | | 2,4 | 95,00 | 1954 | 260,5 |
| | | | | | | 2,6 | 101,3 | 2032 | 270,9 |
| 12 | 1,2 | 40,71 | 601,0 | 100,2 | 16 | 1,4 | 64,21 | 1687 | 210,9 |
| | 1,4 | 46,62 | 660,4 | 110,1 | | 1,6 | 72,38 | 1899 | 237,4 |
| | 1,6 | 52,28 | 723,5 | 120,6 | | 1,8 | 80,30 | 2056 | 257,1 |
| | 1,8 | 57,68 | 773,5 | 128,9 | | 2,0 | 87,97 | 2199 | 274,9 |
| | 2,0 | 62,83 | 816,8 | 136,1 | | 2,2 | 95,38 | 2329 | 291,1 |
| | 2,2 | 67,73 | 854,1 | 142,4 | | 2,4 | 102,5 | 2445 | 305,6 |
| | 2,4 | 72,38 | 886,0 | 147,7 | | 2,6 | 109,5 | 2549 | 318,6 |
| | | | | | | 2,8 | 116,1 | 2643 | 330,3 |
| 13 | 1,4 | 51,02 | 870,6 | 133,9 | 17 | 1,4 | 68,61 | 2104 | 247,5 |
| | 1,6 | 57,30 | 949,2 | 146,0 | | 1,6 | 77,41 | 2320 | 272,9 |
| | 1,8 | 63,33 | 1019 | 156,8 | | 1,8 | 85,95 | 2517 | 296,1 |
| | 2,0 | 69,11 | 1080 | 166,1 | | 2,0 | 94,25 | 2698 | 317,4 |
| | 2,2 | 74,64 | 1134 | 174,4 | | 2,2 | 102,3 | 2863 | 336,8 |
| | 2,4 | 79,92 | 1180 | 181,5 | | 2,4 | 110,1 | 3012 | 354,4 |
| | | | | | | 2,6 | 117,6 | 3148 | 370,4 |
| | | | | | | 2,8 | 124,9 | 3271 | 384,8 |

| D cm | δ cm | F qcm | J cm⁴ | W cm³ |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 1,6 | 82,44 | 2798 | 310,9 |
| | 1,8 | 91,61 | 3042 | 338,0 |
| | 2,0 | 100,5 | 3267 | 363,0 |
| | 2,2 | 109,2 | 3475 | 386,1 |
| | 2,4 | 117,6 | 3663 | 407,0 |
| | 2,6 | 125,8 | 3835 | 426,1 |
| | 2,8 | 133,7 | 3992 | 443,6 |
| 19 | 1,6 | 87,46 | 3338 | 351,4 |
| | 1,8 | 97,26 | 3636 | 382,8 |
| | 2,0 | 106,8 | 3912 | 411,8 |
| | 2,2 | 116,1 | 4168 | 438,7 |
| | 2,4 | 125,2 | 4401 | 463,3 |
| | 2,6 | 134,0 | 4617 | 486,0 |
| | 2,8 | 142,5 | 4814 | 506,8 |
| 20 | 1,6 | 92,49 | 3944 | 394,4 |
| | 1,8 | 102,9 | 4303 | 430,3 |
| | 2,0 | 113,1 | 4637 | 463,7 |
| | 2,2 | 123,0 | 4948 | 494,8 |
| | 2,4 | 132,7 | 5234 | 523,4 |
| | 2,6 | 142,1 | 5499 | 549,9 |
| | 2,8 | 151,3 | 5743 | 574,3 |
| | 3,0 | 160,2 | 5968 | 596,8 |
| 22 | 1,6 | 102,5 | 5367 | 487,9 |
| | 1,8 | 114,2 | 5873 | 533,9 |
| | 2,0 | 125,7 | 6346 | 576,9 |
| | 2,2 | 136,8 | 6789 | 617,2 |
| | 2,4 | 147,8 | 7203 | 654,8 |
| | 2,6 | 158,5 | 7589 | 689,9 |
| | 2,8 | 168,9 | 7948 | 722,5 |
| | 3,0 | 179,1 | 8264 | 751,3 |
| 24 | 1,8 | 125,5 | 7785 | 648,8 |
| | 2,0 | 138,2 | 8432 | 706,9 |
| | 2,2 | 150,7 | 9042 | 753,5 |
| | 2,4 | 162,9 | 9615 | 801,3 |
| | 2,6 | 174,8 | 10154 | 846,2 |
| | 2,8 | 186,5 | 10659 | 888,3 |
| | 3,0 | 197,9 | 11133 | 927,8 |
| 26 | 1,8 | 136,8 | 10073 | 774,8 |
| | 2,0 | 150,8 | 10933 | 841,0 |
| | 2,2 | 164,5 | 11747 | 903,6 |
| | 2,4 | 177,9 | 12516 | 962,8 |
| | 2,6 | 191,1 | 13244 | 1019 |
| | 2,8 | 204,1 | 13930 | 1072 |
| | 3,0 | 216,8 | 14578 | 1121 |
| | 3,2 | 229,2 | 15188 | 1168 |
| 28 | 2,0 | 163,4 | 13886 | 991,9 |
| | 2,2 | 178,3 | 14945 | 1068 |
| | 2,4 | 193,0 | 15951 | 1139 |
| | 2,6 | 207,5 | 16907 | 1208 |
| | 2,8 | 221,7 | 17813 | 1272 |
| | 3,0 | 235,6 | 18673 | 1334 |
| | 3,2 | 249,3 | 19487 | 1392 |
| 30 | 2,0 | 175,9 | 17327 | 1155 |
| | 2,2 | 192,1 | 18676 | 1246 |
| | 2,4 | 208,1 | 19965 | 1331 |
| | 2,6 | 223,8 | 21192 | 1413 |
| | 2,8 | 239,3 | 22359 | 1491 |
| | 3,0 | 254,5 | 23472 | 1565 |
| | 3,2 | 269,4 | 24197 | 1636 |
| 32 | 2,2 | 206,0 | 22988 | 1437 |
| | 2,4 | 223,2 | 24603 | 1538 |
| | 2,6 | 240,1 | 26148 | 1634 |
| | 2,8 | 256,9 | 27628 | 1727 |
| | 3,0 | 273,3 | 29040 | 1815 |
| | 3,2 | 289,5 | 30389 | 1899 |
| | 3,4 | 305,5 | 31676 | 1980 |
| 34 | 2,4 | 238,3 | 29911 | 1759 |
| | 2,6 | 256,5 | 31827 | 1872 |
| | 2,8 | 264,4 | 33664 | 1980 |
| | 3,0 | 292,2 | 35426 | 2084 |
| | 3,2 | 309,6 | 37113 | 2183 |
| | 3,4 | 326,9 | 38729 | 2279 |




## 15. Rechteckiger Querschnitt

$$J_y = J_{min} = \frac{h\,b^3}{12}$$

$$W_x = W_{max} = \frac{b\,h^2}{6}$$

| Breite b | Höhe h | Trägheitsmoment $J_y$ | Widerstandsmoment $W_x$ |
|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 341 | 85 |
| | 9 | 384 | 108 |
| | 10 | 427 | 133 |
| | 11 | 469 | 161 |
| | 12 | 512 | 192 |
| 9 | 9 | 547 | 122 |
| | 10 | 608 | 150 |
| | 11 | 668 | 182 |
| | 12 | 729 | 216 |
| | 13 | 790 | 254 |
| | 14 | 851 | 294 |
| 10 | 10 | 833 | 167 |
| | 11 | 917 | 202 |
| | 12 | 1000 | 240 |
| | 13 | 1083 | 282 |
| | 14 | 1167 | 327 |
| | 15 | 1250 | 375 |
| 11 | 11 | 1220 | 222 |
| | 12 | 1331 | 264 |
| | 13 | 1442 | 315 |
| | 14 | 1553 | 359 |
| | 15 | 1664 | 413 |
| | 16 | 1775 | 469 |
| | 17 | 1886 | 530 |
| 12 | 12 | 1728 | 288 |
| | 13 | 1872 | 338 |
| | 14 | 2016 | 392 |
| | 15 | 2160 | 450 |
| | 16 | 2304 | 512 |
| | 17 | 2448 | 578 |
| | 18 | 2592 | 648 |
| 13 | 13 | 2380 | 366 |
| | 14 | 2563 | 425 |
| | 15 | 2746 | 488 |
| 13 | 16 | 2929 | 555 |
| | 17 | 3112 | 626 |
| | 18 | 3296 | 702 |
| | 19 | 3479 | 782 |
| | 20 | 3662 | 867 |
| 14 | 14 | 3201 | 457 |
| | 15 | 3430 | 525 |
| | 16 | 3659 | 597 |
| | 17 | 3887 | 674 |
| | 18 | 4116 | 756 |
| | 19 | 4345 | 842 |
| | 20 | 4573 | 933 |
| | 21 | 4802 | 1029 |
| 15 | 15 | 4219 | 563 |
| | 16 | 4500 | 640 |
| | 17 | 4781 | 723 |
| | 18 | 5063 | 810 |
| | 19 | 5344 | 901 |
| | 20 | 5625 | 1000 |
| | 21 | 5906 | 1103 |
| | 22 | 6188 | 1210 |
| | 23 | 6469 | 1323 |
| 16 | 16 | 5461 | 683 |
| | 17 | 5803 | 771 |
| | 18 | 6144 | 864 |
| | 19 | 6485 | 963 |
| | 20 | 6827 | 1067 |
| | 21 | 7168 | 1176 |
| | 22 | 7509 | 1291 |
| | 23 | 7851 | 1411 |
| | 24 | 8192 | 1536 |
| 17 | 17 | 6960 | 819 |
| | 18 | 7370 | 918 |
| | 19 | 7779 | 1023 |
| | 20 | 8188 | 1133 |

| Breite b | Höhe h | Trägheits-moment Jy | Widerstands-moment Wx |
|---|---|---|---|
| 17 | 21 | 8598 | 1250 |
| | 22 | 9007 | 1371 |
| | 23 | 9417 | 1499 |
| | 24 | 9826 | 1632 |
| | 25 | 10235 | 1771 |
| 18 | 18 | 8748 | 972 |
| | 19 | 9234 | 1083 |
| | 20 | 9720 | 1200 |
| | 21 | 10206 | 1328 |
| | 22 | 10692 | 1452 |
| | 23 | 11178 | 1587 |
| | 24 | 11664 | 1728 |
| | 25 | 12150 | 1875 |
| | 26 | 12636 | 2028 |
| | 27 | 13122 | 2187 |
| 19 | 19 | 10860 | 1143 |
| | 20 | 11432 | 1267 |
| | 21 | 12003 | 1397 |
| | 22 | 12575 | 1533 |
| | 23 | 13146 | 1675 |
| | 24 | 13718 | 1824 |
| | 25 | 14290 | 1979 |
| | 26 | 14861 | 2141 |
| | 27 | 15433 | 2309 |
| | 28 | 16004 | 2483 |
| 20 | 20 | 13333 | 1333 |
| | 21 | 14000 | 1470 |
| | 22 | 14667 | 1613 |
| | 23 | 15333 | 1763 |
| | 24 | 16000 | 1920 |
| | 25 | 16667 | 2083 |
| | 26 | 17333 | 2253 |
| | 27 | 18000 | 2430 |
| | 28 | 18667 | 2613 |
| | 29 | 19333 | 2803 |
| | 30 | 20000 | 3000 |
| 21 | 21 | 16207 | 1544 |
| | 22 | 16979 | 1694 |
| | 23 | 17750 | 1852 |
| | 24 | 18522 | 2016 |
| | 25 | 19294 | 2188 |
| | 26 | 20066 | 2366 |
| | 27 | 20837 | 2552 |
| | 28 | 21609 | 2744 |
| | 29 | 22381 | 2944 |
| | 30 | 23153 | 3150 |
| | 31 | 23924 | 3364 |
| 22 | 22 | 19521 | 1775 |
| | 23 | 20409 | 1940 |
| 22 | 24 | 21296 | 2112 |
| | 25 | 22183 | 2292 |
| | 26 | 23071 | 2479 |
| | 27 | 23958 | 2673 |
| | 28 | 24845 | 2875 |
| | 29 | 25733 | 3084 |
| | 30 | 26620 | 3300 |
| | 31 | 27507 | 3524 |
| | 32 | 28395 | 3755 |
| | 33 | 29282 | 3993 |
| 23 | 23 | 23320 | 2028 |
| | 24 | 24334 | 2208 |
| | 25 | 25348 | 2396 |
| | 26 | 26362 | 2591 |
| | 27 | 27376 | 2795 |
| | 28 | 28390 | 3005 |
| | 29 | 29404 | 3224 |
| | 30 | 30418 | 3450 |
| | 31 | 31431 | 3684 |
| | 32 | 32445 | 3925 |
| | 33 | 33459 | 4175 |
| | 34 | 34473 | 4431 |
| 24 | 24 | 27648 | 2304 |
| | 25 | 28800 | 2500 |
| | 26 | 29952 | 2704 |
| | 27 | 31104 | 2916 |
| | 28 | 32256 | 3136 |
| | 29 | 33408 | 3364 |
| | 30 | 34560 | 3600 |
| | 31 | 35712 | 3844 |
| | 32 | 36864 | 4096 |
| | 33 | 38016 | 4356 |
| | 34 | 39168 | 4624 |
| | 35 | 40320 | 4900 |
| | 36 | 41472 | 5184 |
| 25 | 25 | 32552 | 2604 |
| | 26 | 33854 | 2817 |
| | 27 | 35156 | 3038 |
| | 28 | 36458 | 3267 |
| | 29 | 37760 | 3504 |
| | 30 | 39063 | 3750 |
| | 31 | 40365 | 4004 |
| | 32 | 41667 | 4267 |
| | 33 | 42969 | 4538 |
| | 34 | 44271 | 4817 |
| | 35 | 45573 | 5104 |
| | 36 | 46875 | 5400 |
| | 37 | 48177 | 5704 |

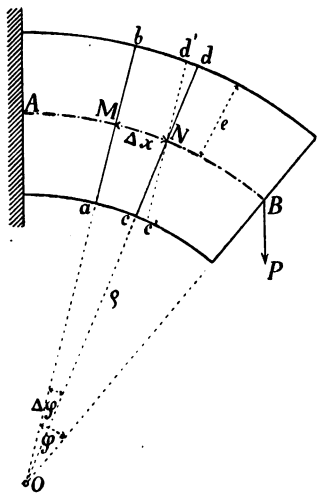
## § 7.

# Die Krümmung und Durchbiegung der belasteten Balken.

In § 4 S. 15 wurde die neutrale Faserschicht eines Balkens als diejenige Faserschicht erklärt, welche, wenn der Balken durch eine Belastung eine Durchbiegung erfährt, weder verlängert noch verkürzt, sondern nur gebogen wird.

Denkt man sich durch die Längsachse des Balkens eine lotrechte Ebene gelegt, so schneidet diese die gebogene neutrale Faserschicht in einer krummen Linie, welche die elastische Linie genannt wird. Diese kann angesehen werden als zusammengesetzt aus einzelnen Kreisbögen, deren Halbmesser an verschiedenen Stellen des Balkens im allgemeinen verschieden groß sind.

Fig. 32.




Ist O der Mittelpunkt des Kreisbogens für das sehr kleine Bogenstück MN (Fig. 32) und bezeichnet man den Krümmungshalbmesser NO mit $\varrho$, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke d'dN und MNO:

$$\frac{d'd}{MN} = \frac{e}{\varrho}$$

d'd ist die Verlängerung der Faser, deren ursprüngliche Länge = MN war, folglich ist nach Gl. 2) S. 6 zu setzen:

$$\frac{d'd}{MN} = \frac{k}{E}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{e}{\varrho} = \frac{k}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 28)$$

Setzt man für k den Wert aus Gl. 17) Seite 18

$$k = \frac{\mathfrak{M}}{W} = \frac{\mathfrak{M}\,e}{J}$$

ein, so erhält man:

$$\frac{e}{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}\,e}{E\,J}$$

Für den Krümmungshalbmesser $\varrho$ ergibt sich danach die Größe:

$$\varrho = \frac{E\,J}{\mathfrak{M}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, daß bei einem prismatischen Balken, bei welchem J stets denselben Wert behält, der Krümmungshalbmesser um so kleiner wird, je größer das Kraftmoment $\mathfrak{M}$ wird, und daß für diejenige Stelle

des Balkens, wo das Moment am größten ist, der Krümmungshalbmesser seinen kleinsten Wert annimmt, der Balken dort also am schärfsten gekrümmt ist.

Infolge der Krümmung erleiden die einzelnen Punkte des Balkens eine Durchbiegung, welche sich folgendermaßen berechnen läßt.

Aus dem Dreieck MNO (Fig. 32) mit der sehr kleinen Seite $MN = \Delta x$ und dem sehr kleinen Winkel $MON = \Delta\varphi$ folgt:

$$\Delta x = \varrho \,.\, \Delta\varphi \quad \text{oder} \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\varrho}$$

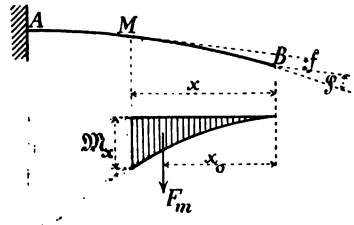
und wenn für $\varrho$ der Wert aus Gl. 29) eingesetzt wird:

$$\Delta\varphi = \frac{\mathfrak{M} \,.\, \Delta x}{EJ} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad 30)$$

Denkt man die Länge $MB = x$ in sehr viele kleine Abschnitte $\Delta x$, und dem entsprechend den Winkel $MOB = \varphi$ in sehr viele kleine Winkelteile $\Delta\varphi$ zerlegt, so erhält man nach der letzten Gleichung für das Trägerstück MB:

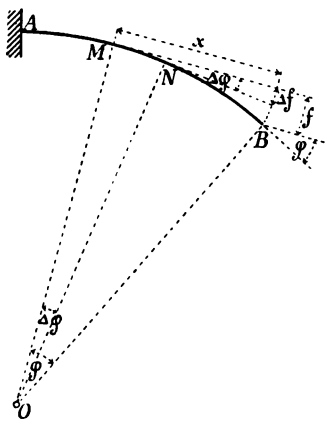
$$\varphi = \Sigma(\Delta\varphi) = \frac{1}{EJ}\,\Sigma(\mathfrak{M} \,.\, \Delta x)$$

Fig. 33.




Trägt man nun (Fig. 33) die Momente $\mathfrak{M}$ auf den Endpunkten der zugehörigen x als Strecken auf, so erhält man als Darstellung von $\Sigma(\mathfrak{M} \,.\, \Delta x)$ eine Fläche, die sogen. Momentenfläche oder kurz M-Fläche. Der Inhalt derselben werde durch $F_m$ bezeichnet. Es ist dann nach der letzten Gleichung, da man wegen Kleinheit des Winkels genügend genau $tg\,\varphi$ statt $\varphi$ setzen kann:

Fig. 34.




$$tg\,\varphi = \frac{1}{EJ} \,.\, F_m \qquad \ldots \quad 31)$$

oder allgemein:

$$tg\,\varphi = \frac{1}{EJ} \,.\, (\mathfrak{M}\text{-Fläche}) \qquad \ldots \quad 32)$$

Nach Fig. 34 ist:

$$\Delta f = x \,.\, \Delta\varphi$$

oder wenn für $\Delta\varphi$ der Wert aus Gl. 30) eingesetzt wird:

$$\Delta f = x\,\frac{\mathfrak{M} \,.\, \Delta x}{EJ}$$

Die Durchbiegung f des Trägerendpunktes B gegen den Punkt M hat demnach die Größe:

$$f = \Sigma(\Delta f) = \frac{1}{EJ}\,\Sigma(\mathfrak{M} \,.\, \Delta x)\, x$$

Der Ausdruck $\Sigma(\mathfrak{M} \,.\, \Delta x)\, x$ bedeutet die Summe der statischen Momente sämtlicher Flächenstreifen der M-Fläche in Bezug auf den Punkt B. Wird daher der

Schwerpunktsabstand dieser Fläche ($= F_m$) mit $x_0$ bezeichnet (Fig. 33), so ist nach S. 13:

$$\Sigma(\mathfrak{M} \cdot \Delta x)\, x = F_m \cdot x_0$$

folglich:

$$f = \frac{1}{EJ} F_m x_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 33)$$

oder allgemein:

$$f = \frac{1}{EJ} \cdot (\text{Moment der } \mathfrak{M}\text{-Fläche}) \quad \ldots\ldots \quad 34)$$

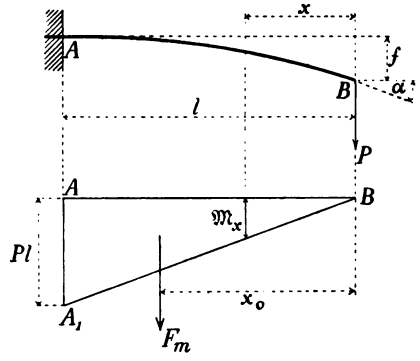
## § 8.

# Der an einem Ende eingespannte Träger.

## 1. Belastung durch Einzelkräfte.

Nach Gl. 17) S. 18 ist für einen prismatischen Balken, bei welchem das Widerstandsmoment W für alle Querschnitte denselben Wert hat, die Spannung k um so größer, je größer das Moment $\mathfrak{M}$ ist. Da k an der stärkst gespannten Stelle des Balkens nicht größer als die zulässige Inanspruchnahme werden darf,

Fig. 35.




so ist ein prismatischer Balken immer nach dem größten Momente zu berechnen, wobei k = der zulässigen Inanspruchnahme gesetzt wird.

Ist ein an einem Ende eingespannter Balken am anderen freien Ende durch die Kraft P belastet (Fig. 35), so hat für eine Stelle in der Entfernung x vom Endpunkte des Balkens das Moment der Kraft P den Wert:

$$\mathfrak{M}_x = P\,x$$

Das Moment wächst mit x und wird am größten da, wo der Hebelarm x am größten ist, also an der Einspannungsstelle, für welche $x = l$ zu setzen ist. Danach ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P\,l$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x}{l}$$

Die Momente verhalten sich wie die Entfernungen von der Belastungsstelle. Da für $x = 0$ auch $\mathfrak{M} = 0$ wird, so lassen sich die Momente darstellen durch die Ordinaten des Dreiecks $AA_1B$ (Fig. 35), dessen Endordinate $AA_1 = Pl$ ist.

Setzt man in Gl. 17) S. 18 für $\mathfrak{M}$ den größten Wert $Pl$ ein, so folgt:

$$\mathbf{Pl = kW} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 35)$$

wo k die Spannung an der Einspannungsstelle, also die größte überhaupt im Balken auftretende Spannung ist, folglich gleich der zulässigen Inanspruchnahme zu setzen ist. Alle anderen Stellen eines prismatischen Balkens erleiden eine geringere Spannung, es ist deshalb die Einspannungsstelle der gefährliche Querschnitt.

Die letzte Gleichung kann in der Form:

$$P = \frac{kW}{l}$$

benutzt werden, die Tragfähigkeit eines gegebenen Balkens zu berechnen.

Soll dagegen für eine gegebene Belastung der erforderliche Balkenquerschnitt bestimmt werden, so ist zu setzen:

$$W = \frac{Pl}{k}$$

So z. B. ist für einen Kreisquerschnitt mit dem Durchmesser d

$$\frac{d^3\pi}{32} = \frac{Pl}{k}$$

also:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi}\,\frac{Pl}{k}}$$

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h würde sein:

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{Pl}{k}$$

Man kann hier nun entweder b annehmen und h danach berechnen, oder umgekehrt h annehmen und b danach berechnen, oder endlich für b : h ein bestimmtes Verhältnis wählen, woraus sich dann die Größen b und h ebenfalls ermitteln lassen. (Letzteres Verfahren ist wohl das zweckmäßigste.)

Setzt man z. B.

$$\frac{b}{h} = \frac{3}{4}, \text{ also } b = \frac{3}{4}h$$

so wird:

$$\frac{^3/_4\, h \,.\, h^2}{6} = \frac{P\,l}{k}$$

$$h = \sqrt[3]{8\,\frac{P\,l}{k}}$$

Bei eisernen Trägern berechnet man das Widerstandsmoment W und sucht dann am zweckmäßigsten aus den Profiltabellen der Walzwerke ein Profil heraus, dessen Widerstandsmoment gleich oder nahezu gleich dem berechneten ist.

Die Durchbiegung f des Endpunktes B ergibt sich aus Gl. 33) S. 44, worin für den vorliegenden Fall nach Fig. 35 zu setzen ist:

$$F_m = A\,A_1\,B = P\,l \,.\, \frac{l}{2}$$

$$x_0 = {}^2/_3\, l$$

Man erhält:

$$\mathbf{f = \frac{P\,l^3}{3\,E\,J}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

Setzt man hierin nach Gl. 17) S. 18:

$$P\,l = k\,W = k\,\frac{J}{e}$$

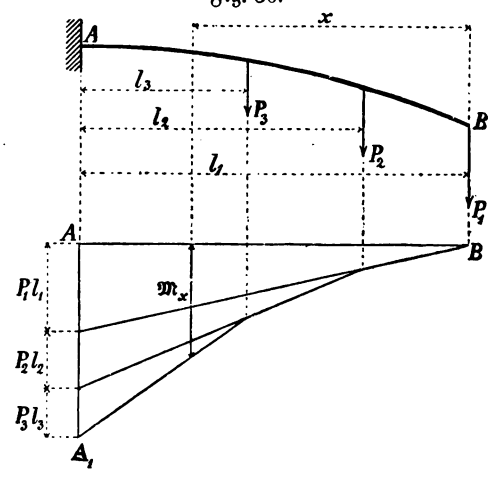
so wird:

$$\mathbf{f = \frac{1}{3}\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{e}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 37)$$

Der Winkel $\alpha$, den die elastische Linie an dem Endpunkt B mit der Wagerechten einschließt, folgt nach Gl. 31) S. 43 aus:

$$\mathbf{tg\,\alpha = \frac{P\,l^2}{2\,E\,J}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 38)$$

Fig. 36.




Wirken auf einen eingespannten Träger verschiedene Einzelkräfte $P_1 P_2 P_3$ in den Entfernungen $l_1 l_2 l_3$ von der Einspannungsstelle (Fig. 36), so ist zu setzen:

$$\mathfrak{M}_{max} = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3$$

und das Widerstandsmoment wird:

$$W = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3}{k}$$

Fig. 36 zeigt zugleich die graphische Darstellung der Momente.

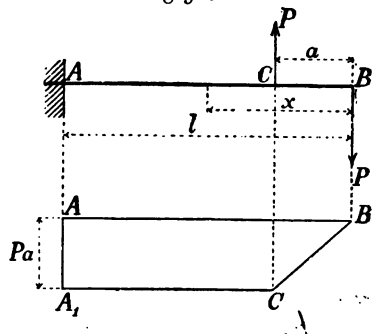
Wirkt am freien Ende des eingespannten Trägers (Fig. 37) ein Kräftepaar, dessen Moment $= Pa$ ist, so ist für eine beliebige Stelle in der Entfernung $x$ vom Endpunkte:

$$\mathfrak{M}_x = Px - P(x - a) = Pa$$

Das Moment zwischen den Punkten A und C ist also unveränderlich und hat die Größe $Pa$, daher:

$$W = \frac{Pa}{k}$$

Fig. 37.




## 2. Streckenbelastung.

Ist die Belastung $p$ für die Längeneinheit gleichmäßig über die ganze Länge $l$ des Balkens verteilt (Fig. 38), so liegt der Angriffspunkt der Gesamtbelastung $pl$ im Schwerpunkte der Belastungsfläche, hat also den Abstand $\frac{l}{2}$ von der Einspannungsstelle.

Das Moment an der Stelle $x$ ist:

$$\mathfrak{M}_x = px \cdot \frac{x}{2}$$

Das größte Moment an der Einspannungsstelle ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = pl \cdot \frac{l}{2}$$

folglich:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x^2}{l^2}$$

Die Momente verhalten sich wie die Quadrate der Abstände vom freien Ende des Balkens, die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine Parabel $AA_1B$, deren Scheitel in B liegt und deren Höhe $AA_1 = \frac{pl^2}{2}$ ist. Eine einfache Konstruktion der Parabel ist in Fig. 38 angedeutet.

Der gefährliche Querschnitt des Balkens, welcher mit der Einspannungsstelle zusammenfällt, ist nach dem größten Moment zu berechnen. Setzt man:

$$\mathfrak{M}_{max} = kW$$

so folgt:

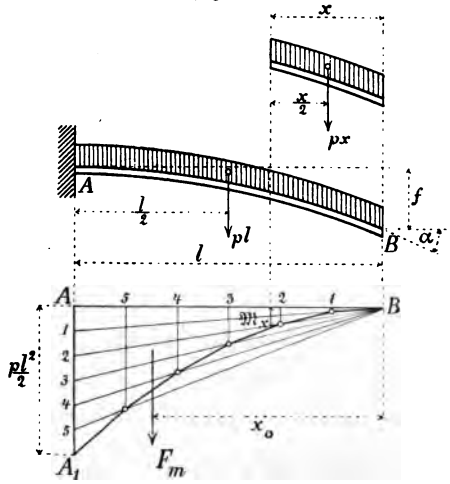
$$\mathbf{pl \cdot \frac{l}{2} = kW} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 39)$$

Führt man für die Gesamtbelastung p l den Buchstaben P ein, so erscheint Gl. 39) in der Form:

$$P = p \cdot l \quad \cdots\cdots\cdots \quad P \cdot \frac{l}{2} = k W$$

Diese Gleichung und Gl. 35) S. 45 lassen erkennen, daß ein Balken doppelt so viel trägt, wenn die Belastung gleichmäßig über die Länge desselben

Fig. 38.




verteilt ist, als wenn dieselbe Belastung als Einzelkraft am freien Ende des Balkens angreift.

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte des Balkens und wird dieses mit G bezeichnet, so ist:

$$G \cdot \frac{l}{2} = k W$$

Daraus ergibt sich die Länge l, welche ein an einem Ende eingespannter Balken haben darf, um sich selbst noch mit Sicherheit tragen zu können, zu:

$$l = \frac{2 k W}{G}$$

Die M-Fläche für den gleichmäßig belasteten Freiträger wird (wie schon oben gesagt) begrenzt durch eine Parabel und hat den Flächeninhalt:

$$F_m = \frac{l}{3} \cdot \frac{p l^2}{2} = \frac{p l^3}{6}$$

Der Abstand $x_0$ des Schwerpunktes dieser Fläche vom Trägerende B ist:

$$x_0 = {}^3/_4 l$$

Nach Einsetzung dieser Werte ergibt sich die Durchbiegung f aus Gl. 33) S. 44 zu:

$$f = \frac{p l^4}{8 E J} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 40)$$

oder nach Einsetzung von:

$$\frac{p\,l^2}{2} = k\,W = k\,\frac{J}{e}$$

zu:

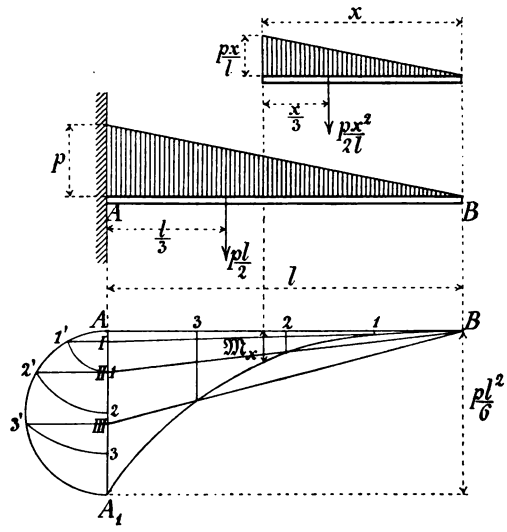
$$f = \frac{1}{4}\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 41)$$

Der Winkel $\alpha$ (Fig. 38) folgt nach Gl. 31) S. 43 aus:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p\,l^3}{6\,E\,J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

Die Streckenbelastung sei nun nicht mehr gleichmäßig über die ganze Länge des Balkens verteilt, sondern sei $= p$ an der Einspannungsstelle A und nehme

Fig. 39.




von dort aus stetig und gleichförmig ab bis auf Null am freien Ende B (Fig. 39). Die Belastungsfläche ist alsdann ein Dreieck.

Die ganze Belastung ist $= \frac{p\,l}{2}$; der Angriffspunkt derselben (Schwerpunkt des Belastungsdreiecks) hat die Entfernung $^1/_3\,l$ von der Einspannungsstelle, folglich ist:

$$M_{max} = \frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{p\,l^2}{6}$$

Für eine Stelle in der Entfernung x vom freien Balkenende ist die Belastungshöhe $= \frac{p\,x}{l}$. Die Belastung des Balkenstückes von der Länge x ist also:

$$P = \frac{p\,x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{p\,x^2}{2\,l}$$

und das Moment an der Stelle x:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,x^2}{2\,l} \cdot \frac{x}{3} = \frac{p\,x^3}{6\,l}$$

Aus den beiden Momentengleichungen folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x^3}{l^3}$$

Die Momente verhalten sich wie die dritten Potenzen der Abstände vom freien Ende des Balkens, die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine kubische Parabel, deren Scheitel in B liegt und deren Höhe $A\,A_1 = \frac{p\,l^2}{6}$ ist.

Zur Konstruktion der kubischen Parabel teile die Geraden $A\,A_1$ und $A\,B$ (Fig. 39) durch die Punkte 1 2 3 in die gleiche Anzahl unter sich gleicher Teile (hier vier), beschreibe über $A\,A_1$ einen Halbkreis und von dem Mittelpunkt A aus durch die auf $A\,A_1$ liegenden Punkte 1 2 3 Kreisbögen bis zu den Schnittpunkten 1′ 2′ 3′ mit dem Halbkreis. Ziehe ferner 1′ I, 2′ II, 3′ III parallel zu A B und verbinde die Punkte I II III mit B durch gerade Linien. Durch die auf der A B liegenden Punkte 1 2 3 ziehe sodann Parallelen zu $A\,A_1$, welche die durch I II III nach B gezogenen Strahlen in Parabelpunkten schneiden.

Der gefährliche Querschnitt liegt an der Einspannungsstelle und der Balken ist daher zu berechnen nach:

$$\frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{3} = k\,W \quad \ldots\ldots\ldots \quad 43)$$

### 3. Zusammengesetzte Belastung.

Wird ein an einem Ende eingespannter Träger an seinem freien Ende durch das Gewicht P belastet und hat derselbe außerdem noch eine gleichmäßig über seine Länge verteilte Belastung p für die Längeneinheit zu tragen (Fig. 40), so ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P\,l + p\,l \cdot \frac{l}{2}$$

Setzt man:

$$\mathfrak{M}_{max} = k\,W$$

so ergibt sich das Widerstandsmoment:

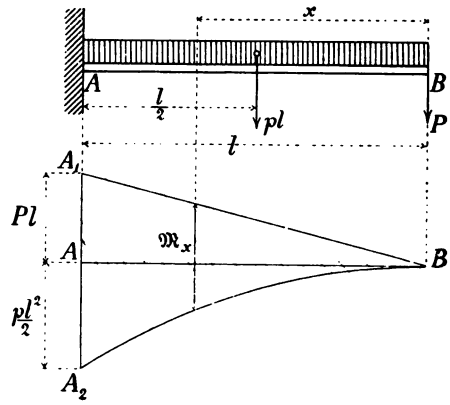
$$W = \frac{P\,l + p\,l \cdot \frac{l}{2}}{k}$$

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte G des Trägers, so wird:

$$W = \frac{P\,l + G \cdot \frac{l}{2}}{k}$$

Die graphische Darstellung der Momente (Fig. 40) setzt sich zusammen aus dem Dreieck $A A_1 B$, herrührend von der Einzelkraft P und der von der Parabel $A_2 B$ begrenzten Fläche $A A_2 B$ als Beitrag von der gleichmäßig verteilten Belastung.

Fig. 40.




Wird die durch die Einzelkraft P hervorgebrachte Beanspruchung mit $k_1$ und die durch die gleichmäßig verteilte Belastung hervorgebrachte Beanspruchung mit $k_2$ bezeichnet, so ergibt sich die Durchbiegung des Endpunktes B durch Addition der Gleichungen 37) und 41) zu:

$$f = \left(\frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{4}\right) \frac{1}{E} \frac{l^2}{e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 44)$$

Aufgabe 16. Ein an einem Ende wagerecht eingespannter Balken von Eichenholz, dessen Länge = 150 cm und dessen Querschnitt 20 × 24 cm ist, soll an seinem freien Ende durch ein Gewicht P belastet werden. Wie groß darf P sein?

Auflösung. Nach der Tabelle S. 4 ist hier zu setzen: k = 80 (für Druck); ferner ist nach der Tabelle 15 § 6 S. 40 für b = 20 cm, h = 24 cm:

$$W = 1920$$

folglich erhält man nach Gl. 35) S. 45:

$$P = \frac{80 \cdot 1920}{150} = 1024 \text{ kg}$$

Aufgabe 17. Ein an einem Ende eingemauerter schmiedeeiserner I-Träger von 250 cm Länge wird am freien Ende durch ein Gewicht von 3000 kg belastet. Welches Profil muß der Träger erhalten und wie groß wird die Durchbiegung des Endpunktes sein? (k = 1000)

Auflösung. Aus Gl. 35) S. 45 folgt:

$$W = \frac{3000 \cdot 250}{1000} = 750$$

Nach Tabelle 2 § 6 ist das Profil Nr. 32 mit W = 781 zu wählen.

Die Beanspruchung wird dann genau:

$$k = \frac{\mathfrak{M}}{W} = \frac{3000 \cdot 250}{781} = 960 \text{ kg/qcm}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 37) S. 46, worin $e = \frac{h}{2} = 16$ cm zu setzen ist:

$$f = \frac{1}{3} \frac{960}{2000000} \cdot \frac{250^2}{16} = 0{,}625 \text{ cm}$$

Aufgabe 18. Ein Balken aus Kiefernholz von 180 cm Länge ist an seinem freien Ende durch ein Gewicht $P = 800$ kg belastet. Welche Abmessungen erhält der Balken bei $k = 60$ kg/qcm?

Auflösung.

$$W = \frac{800 \cdot 180}{60} = 2400$$

$$\frac{b h^2}{6} = 2400$$

Für $b = 21$ cm wird:

$$h = \sqrt{\frac{6}{21} \cdot 2400} = \sim 26{,}2 \text{ cm}$$

Wählt man $h = 26$ cm, so wird:

$$b = \frac{6 \cdot 2400}{26^2} = 21{,}3 \text{ cm}$$

Wird $b = {}^3/_4\, h$ angenommen, so ergibt sich:

$$\frac{{}^3/_4\, h \cdot h^2}{6} = 2400$$

$$h = \sqrt[3]{8 \cdot 2400} = 26{,}8 \text{ cm}$$

$$b = \frac{3}{4} \cdot 26{,}8 = 20{,}1 \text{ cm}$$

Aufgabe 19. Ein 220 cm ausladender I-Träger soll nach Fig. 36 S. 46 belastet sein, und zwar sei:

$$P_1 = 200 \text{ kg}; \quad l_1 = 220 \text{ cm}$$
$$P_2 = 500 \text{ kg}; \quad l_2 = 180 \text{ cm}$$
$$P_3 = 300 \text{ kg}; \quad l_3 = 120 \text{ cm}$$

Welches Profil muß der Träger erhalten bei $k = 1000$?

Auflösung.

$$M_{max} = 200 \cdot 220 + 500 \cdot 180 + 300 \cdot 120 = 170000 \text{ kg cm}$$

$$W = \frac{170000}{1000} = 170$$

Nach Tabelle 2 § 6 genügt Profil Nr. 19 mit $W = 185$.

Aufgabe 20. Welche gleichmäßig verteilte Belastung kann ein 200 cm langer Freiträger aus Eichenholz, dessen Breite $b = 18$ cm und dessen Höhe $h = 24$ cm ist, mit Sicherheit tragen? ($k = 60$)

Auflösung. Nach Tabelle 15 § 6 S. 40 ist:

$$W = 1728$$

folglich nach Gl. 39) S. 47:

$$p\,l = \frac{2 \cdot 60 \cdot 1728}{200} = 1036{,}8 \text{ kg}$$

Aufgabe 21. Wie lang kann ein an einem Ende wagerecht eingespannter I-Träger Profil Nr. 18 sein, um sich selbst (bei $k = 1000$) noch mit Sicherheit tragen zu können, und wie groß ist die Durchbiegung des freien Endes?

Auflösung. Das Widerstandsmoment dieses Trägers ist nach Tabelle 2 § 6:

$$W = 161$$

Das Gewicht für 1 cm Länge:

$$g = 0{,}217 \text{ kg}$$

folglich das Gesamtgewicht:

$$G = 0{,}217 \cdot l$$

Danach ist:

$$l = \frac{2\,k\,W}{G} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 161}{0{,}217 \cdot l}$$

$$l = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 161}{0{,}217}} = 1218 \text{ cm} = 12{,}18 \text{ m}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 41) S. 49:

$$f = \frac{1}{4} \cdot \frac{1000}{2000000} \cdot \frac{1218^2}{9} = 20{,}6 \text{ cm}$$

Aufgabe 22. Ein 200 cm langer Freiträger aus I-Eisen soll am Ende durch $P = 500$ kg belastet sein; außerdem hat derselbe noch eine gleichmäßige Belastung $p = 8$ kg auf 1 cm zu tragen. Es soll das Profil des Trägers und die Durchbiegung des Endpunktes bestimmt werden. ($k = 1000$)

Auflösung.

$$M_{max} = 500 \cdot 200 + 8 \cdot 200 \cdot \frac{200}{2} = 260000$$

$$W = \frac{260000}{1000} = 260$$

Gewählt: Profil Nr. 22 mit $W = 278$.

Die durch $P = 500$ hervorgebrachte Beanspruchung ist:

$$k_1 = \frac{500 \cdot 200}{278} = 360 \text{ kg/qcm}$$

Durch die gleichmäßig verteilte Belastung entsteht:

$$k_2 = \frac{8 \cdot 200 \cdot 200}{2 \cdot 278} = 575 \text{ kg/qcm}$$

Im ganzen:

$$k = k_1 + k_2 = 935 \text{ kg/qcm}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 44) S. 51:

$$F = \left(\frac{360}{3} + \frac{575}{4}\right) \frac{200^2}{2000000 \cdot 11} = 0{,}48 \text{ cm}$$

Aufgabe 23. Ein Balkon von 3,2 m Länge und 1,2 m Ausladung wird durch 5 Konsolträger (I-Eisen) unterstützt, die 0,8 m auseinander liegen. Wie stark müssen diese genommen werden, wenn als Belastung einschließlich Eigengewicht 750 kg auf 1 qm gerechnet wird und das Gewicht der Brüstung 200 kg für das laufende Meter beträgt?

Auflösung. Auf jeden der drei mittleren Träger kommt die gleichmäßig verteilte Belastung:

$$p\,l = 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 750 = 720 \text{ kg}$$

und die am Ende wirkende Einzellast:

$$P = 0{,}8 \cdot 200 = 160 \text{ kg}$$

folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{720 \cdot 120}{2} + 160 \cdot 120 = 62400$$

$$W = \frac{62400}{1000} = 62{,}4$$

Nach der Tabelle 2 § 6 genügen I-Eisen Nr. 13 mit W = 67,0.

Für die beiden Endträger sind die Belastungen:

$$p\,l = 0{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 750 + 1{,}2 \cdot 200 = 600 \text{ kg}$$

$$P = 0{,}4 \cdot 200 = 80 \text{ kg}$$

folglich ist:

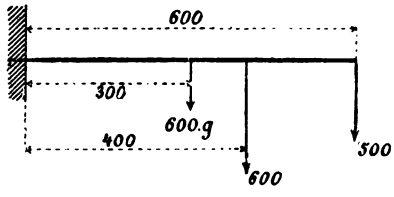
$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{600 \cdot 120}{2} + 80 \cdot 120 = 45600$$

$$W = \frac{45600}{1000} = 45{,}6$$

Erforderlich: I-Eisen Nr. 12 mit W = 54,5.

Aufgabe 24. Es soll der eiserne I-Träger Fig. 41 unter Berücksichtigung des Eigengewichtes berechnet werden.

Fig. 41.




Auflösung. Wird das Eigengewicht des Trägers auf 1 cm Länge mit g bezeichnet, so ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = 500 \cdot 600 + 600 \cdot 400 + 600\,g \cdot 300$$

$$\mathfrak{M}_{max} = 540000 + 180000 \cdot g$$

$$W = \frac{540000}{1000} + \frac{180000}{1000} \cdot g$$

$$W = 540 + 180 \cdot g$$

Nach der Tabelle 2 § 6 würde ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes Profil Nr. 28 mit W = 541 genügen. Das Gewicht dieses Eisens beträgt 0,476 kg für 1 cm Länge, folglich ist:

$$180\,g = 180 \cdot 0{,}476 = 85{,}7$$

und das erforderliche Widerstandsmoment würde betragen:

$$W = 540 + 85{,}7 = 625{,}7$$

Danach ist Profil Nr. 28 zu schwach und es ist dafür das Profil Nr. 30 mit **W = 652** zu wählen.

Da das Gewicht dieses Eisens 0,538 kg für 1 cm Länge beträgt, so ist

$$180 \text{ g} = 180 \cdot 0{,}538 = \backsim 97$$

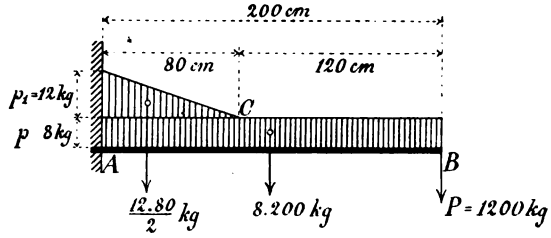
das erforderliche Widerstandsmoment also:

$$W = 540 + 97 = 637$$

Das Profil Nr. 30 ist daher genügend.

Aufgabe 25. Ein Freiträger von 200 cm Länge ist nach Fig. 42 belastet. Es soll das erforderliche Profil berechnet werden.

Fig. 42.




Auflösung. Das Moment bei A ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{12 \cdot 80}{2} \cdot \frac{80}{3} + 8 \cdot 200 \cdot 100 + 1200 \cdot 200 = 412800$$

Das Moment bei C ist:

$$\mathfrak{M}_c = 8 \cdot 120 \cdot 60 + 1200 \cdot 120 = 201600$$

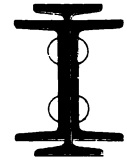
Für den Querschnitt bei C ist daher erforderlich:

$$W_c = \frac{201600}{1000} = 202$$

und für den Querschnitt bei A:

$$W = \frac{412800}{1000} = 413$$

Fig. 43.



Für den Träger kann danach gewählt werden:

ein I-Eisen Nr. 26 mit W = 441

oder: zwei I-Eisen Nr. 20 mit je W = 214, davon eins durchlaufend von A bis B, das andere nur von A bis C reichend

oder: ein I-Eisen Nr. 20 durchlaufend von A bis B und zwei [-Eisen Nr 16 mit je W = 116 von A bis C (nach Fig. 43).

Aufgabe 26. Wie groß muß der Durchmesser d eines cylindrischen Tragzapfens aus Flußeisen sein, dessen Länge $l = 1{,}5\,d$ betragen soll, unter der Annahme, daß sich der Druck P gleichmäßig über die Zapfenlänge verteilt?

Auflösung. Da hier die Biegungs-Beanspruchung zwischen einem größten positiven und einem größten negativen Werte beständig wechselt, so ist für die zulässige Inanspruchnahme die Tabelle III S. 5 (Biegung) maßgebend. Danach ist für Flußeisen zu setzen: k = 300 bis 400 kg/qcm. Wir wählen unter Voraussetzung guten Materials: k = 375 kg/qcm.

Das Widerstandsmoment des Zapfenquerschnittes ist nach der Tabelle S. 27 Nr. 13:

$$W = \frac{d^3 \pi}{32}$$

folglich lautet die allgemeine Biegungsgleichung:

$$\frac{d^3 \pi}{32} k = P \cdot \frac{l}{2}$$

Setzt man hierin $l : d = 1{,}5$ und $k = 375$, so entsteht:

$$\frac{d^2 \pi}{32} = \frac{1{,}5\, P}{2 \cdot 375}$$

$$d = \sqrt{\frac{16 \cdot 1{,}5}{3{,}14 \cdot 375} \cdot P} = \frac{1}{7} \sqrt{P}$$

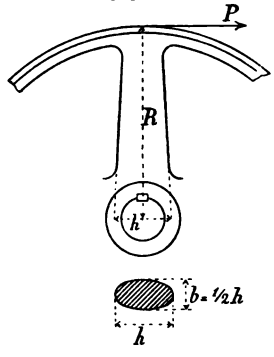
z. B. für $P = 2000$ kg wird:

$$d = \frac{1}{7} \sqrt{2000} = 6{,}4 \text{ cm}$$

Aufgabe 27. Für eine gußeiserne Riemenscheibe vom Halbmesser R, auf welche am Umfang die Kraft P (Differenz der Riemenspannungen)*) wirkt, sollen die Arme berechnet werden (Fig. 44).

Auflösung. Die Arme können annähernd als fest in der Nabe eingespannte Träger von der Länge R betrachtet werden, die am anderen Ende durch die Kraft P belastet sind. Man kann (nach Bach) annehmen, daß 1/3 der Arme gleichzeitig und gleichmäßig zur Kraftübertragung beiträgt, so daß, wenn die Armzahl mit z bezeichnet wird, zu setzen ist:

Fig. 44.




$$P R = k W \frac{z}{3}$$

Der Armquerschnitt ist elliptisch und hat, verlängert gedacht und in der Mitte der Welle gemessen, die Höhe h und die Breite $b = 1/2\, h$.

Für diesen Querschnitt ist nach der Tabelle S. 27 Nr. 15:

$$W = \frac{b h^2 \pi}{32} = \frac{h^3 \pi}{2 \cdot 32}$$

dafür genügend genau:

$$W = 0{,}1 \cdot \frac{h^3}{2}$$

Setzt man diesen Wert, und außerdem (da hier die Belastung zwischen Null und einem Maximum wechseln kann) nach der Tabelle II S. 5 die Biegungsbeanspruchung für Gußeisen: $k = 300$ kg/qcm in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$P R = 300 \cdot 0{,}1 \frac{h^3}{2} \cdot \frac{z}{3}$$

und daraus:

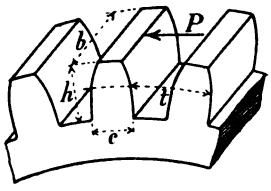
$$h = \sqrt[3]{\frac{P R}{5 z}}$$

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik. 4. Aufl. S. 114, Gl. 149.

**Aufgabe** 28. Es soll die erforderliche Teilung eines gußeisernen Zahnrades berechnet werden, welches den Zahndruck P auszuhalten hat (Fig. 45).

**Auflösung.** Der Druck P beginnt (bei dem treibenden Rade) an der Wurzel des in Eingriff kommenden Zahnes und steigt dann während des Ganges der Räder allmählich auf bis zum Kopf, in welchem Augenblick (oder auch schon früher) ein folgendes Zähnepaar in Eingriff kommt. Der ungünstigste Fall für einen Zahn (und dieser Fall wird immer der Berechnung der Zahnstärke zu Grunde gelegt) ist also der, daß der Druck P am Kopfe angreift und daß nur ein Zahn diesen Druck auszuhalten hat. Unter dieser Voraussetzung ist:

Fig. 45.




$$P\,h = k\,W = k\,\frac{b\,c^2}{6}$$

Es ist in der Praxis üblich, die Abmessungen der Zähne (Breite, Höhe, Stärke) auf die Teilung (d. i. das Maß von einem beliebigen Punkte des einen Zahnes bis zu dem gleichliegenden Punkte des folgenden Zahnes, im Teilkreise gemessen) zu beziehen. Wird die Teilung mit t bezeichnet, so ist zu setzen:

$$h = 0{,}7\,t$$

und angenähert:

$$c = 0{,}5\,t$$

Man erhält dann für k = 300 kg/qcm (Tabelle II S. 5):

$$P \,.\, 0{,}7\,t = 300\,\frac{b\,(0{,}5\,t)^2}{6}$$

oder:

$$P = \frac{300\,.\,0{,}25\,b\,t^2}{6\,.\,0{,}7\,t} = \backsim 18\,b\,t$$

Für Windenräder mit b = 2 t wird:

$$P = 18\,.\,2\,t\,.\,t = 36\,t^2$$

woraus die Teilung folgt:

$$t = \frac{1}{6}\sqrt{P}$$

## § 9.

# Der Träger auf zwei Stützen.

## 1. Belastung durch Einzelkräfte.

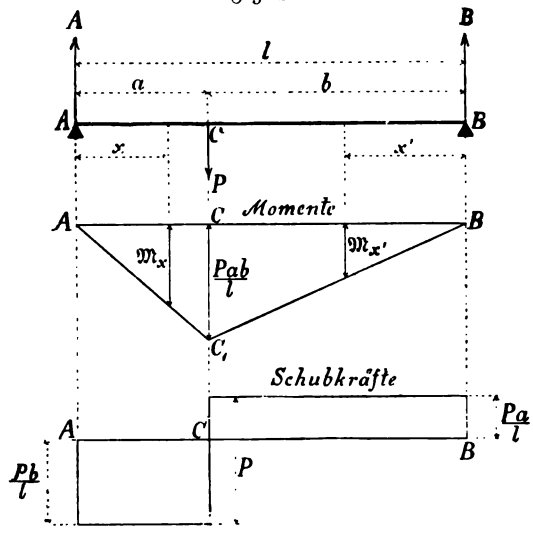
Ein an beiden Enden unterstützter, durch lotrechte Kräfte belasteter Träger übt auf die Unterstützungspunkte lotrecht abwärts gerichtete Drücke, die sogen. **Stützendrücke** oder **Auflagerdrücke**, aus, und nach dem Gesetze der Wechselwirkung erfährt umgekehrt der Träger durch die Unterstützungspunkte die gleichen, aber entgegengesetzt, also lotrecht **aufwärts** gerichteten Drücke. Diese werden **Stützenwiderstände** genannt.

Ist der Träger A B (Fig. 46) durch eine lotrechte Kraft P belastet, welche die ganze Trägerlänge l in die Abschnitte a und b teilt, und werden die Stützen-

widerstände mit A und B bezeichnet, so müssen sich die drei Kräfte A B P im Gleichgewichte halten, daher:

$$A + B = P$$

Fig. 46.




Die Stützenwiderstände A und B ergeben sich aus der Gleichung der statischen Momente. In Bezug auf den Drehpunkt B ist $A\,l = P\,b$, folglich:

$$\mathbf{A = \frac{P\,b}{l}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 45)$$

In Bezug auf den Drehpunkt A ist $B\,l = P\,a$, daher:

$$\mathbf{B = \frac{P\,a}{l}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 46)$$

Ist der eine Stützenwiderstand, z. B. A, mit Hilfe der Gleichung der statischen Momente ermittelt, so ergibt sich der andere Stützenwiderstand B auch aus der Bedingung:

$$B = P - A = P - \frac{P\,b}{l} = \frac{P\,a}{l}$$

Der Widerstand der einen Stütze ist gleich der Last, multipliziert mit dem Abstande derselben von der anderen Stütze und dividiert durch die ganze Trägerlänge.

Das Moment $\mathfrak{M}_x$ im Abstande x von A ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x = \frac{P\,b}{l}\,x$$

Das Moment $\mathfrak{M}_x'$ im Abstande x' von B ist:

$$\mathfrak{M}_x' = B\,x' = \frac{P\,a}{l}\,x'$$

Die Momente haben in den Auflagerpunkten den Wert Null, nehmen dann mit x bezw. x' zu und erreichen den größten Wert im Angriffspunkte C der Last. Für diesen Punkt wird $x = a$ und $x' = b$, folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P \frac{a\,b}{l}$$

Da die Momente sich verhalten wie die Abstände von den Unterstützungspunkten, so müssen die Begrenzungslinien der Figur, welche die Momente graphisch darstellt, gerade Linien sein. Konstruiert man also das Dreieck $A\,B\,C_1$ (Fig. 46) so, daß $C\,C_1 = P \frac{a\,b}{l}$ ist, so können die Momente durch die Ordinaten dieses Dreiecks gemessen werden.

Ist der Träger prismatisch, so ist zur Berechnung des Querschnittes das größte Moment maßgebend, welches $= k\,W$ zu setzen ist.

$$\left| \quad P \frac{a\,b}{l} = k\,W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47) \right.$$

Denkt man sich den Träger in der Entfernung $x < a$ vom Auflager A zerschnitten und betrachtet das linke Stück desselben (Fig. 47), so ist der Stützen-

Fig. 47.

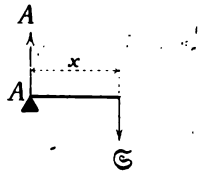
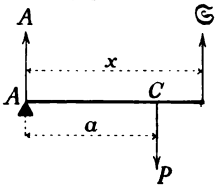



Fig. 48.




widerstand A die einzige äußere auf das Trägerstück wirkende Kraft. Da sich aber der ganze Träger und folglich auch jedes einzelne Stück desselben im Gleichgewichte befinden soll, so muß an der Schnittstelle noch eine Kraft S angebracht werden, welche gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung wie A hat. Diese Kraft wird Schubkraft oder Querkraft genannt; sie sucht das linke Trägerstück gegen das rechte in lotrechter Richtung zu verschieben, was durch die in dem betreffenden Querschnitt auftretenden inneren Schubspannungen verhindert wird.

Die Schubkraft ändert sich nicht von A bis C.

Wird $x > a$, so kommt im Punkte C die äußere Kraft P hinzu und das Trägerstück (Fig. 48) befindet sich unter Einwirkung der drei Kräfte A, P und S im Gleichgewichte. Es hat deshalb von C bis B die für das linke Trägerstück nach oben gerichtete Schubkraft die Größe:

$$S = P - A = B$$

Im Punkte C, also an der Stelle, wo das Moment seinen größten Wert erreicht, ändert die Schubkraft die Richtung, hat also die Größe Null.

Die Schubkräfte lassen sich, ähnlich wie die Momente, durch eine geometrische Figur graphisch darstellen, wie in Fig. 46 angedeutet ist.

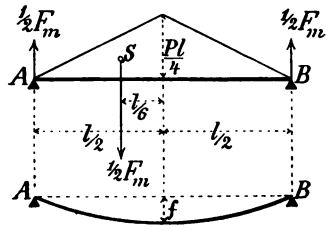
Wird $a = b = \frac{l}{2}$, d. h. hängt die Last P in der Mitte des Trägers, so sind die Stützenwiderstände:

$$A = B = {}^1/_2\,P$$

und man erhält statt Gl. 47):

$$\left| \frac{Pl}{4} = kW \right. \quad \ldots \quad 48)$$

Fig. 49.




Die Berechnung der Durchbiegung f kann auch hier wieder geschehen mit Hilfe der M-Fläche, durch welche man den Träger als belastet auffaßt.

Unter der Annahme von $a = b = {}^1/_2\,l$ ist der Inhalt der M-Fläche (Fig. 49):

$$F_m = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{8}$$

und das dadurch hervorgerufene Moment in Bezug auf die Trägermitte:

$${}^1/_2\,F_m \cdot \frac{l}{2} - {}^1/_2\,F_m \cdot \frac{l}{6} = \frac{Pl^3}{32} - \frac{Pl^3}{96} = \frac{Pl^3}{48}$$

folglich nach Gl. 34) S. 44:

$$f = \frac{1}{EJ}\,\frac{Pl^3}{48}$$

Setzt man hierin:

$$\frac{Pl}{4} = k\,\frac{J}{e}$$

so folgt:

$$\left| f = \frac{1}{12}\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{e} \right. \quad \ldots \quad 49)$$

Genau in derselben Weise ergibt sich, wenn der Angriffspunkt C der Last P die Trägerlänge l in die unter sich ungleichen Abschnitte a und b teilt (Fig. 46), die Durchbiegung im Punkte C zu:

$$f = \frac{1}{3}\,\frac{k}{E}\,\frac{ab}{e} \quad \ldots \quad 50)$$

Für $a = b = {}^1/_2\,l$ entsteht hieraus natürlich wieder die Gl. 49).

Wirken zwei Einzellasten P und $P_1$ auf den Träger und teilen diese die ganze Trägerlänge l in die Abschnitte a und b, bezw. $a_1$ und $b_1$ (Fig. 50), so sind die Stützenwiderstände:

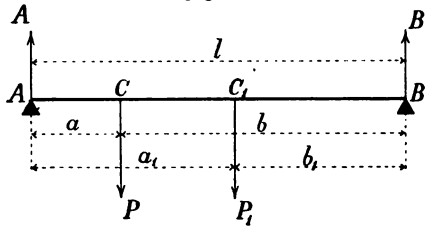
$$A = \frac{Pb + P_1 b_1}{l} \qquad B = \frac{Pa + P_1 a_1}{l}$$

und die Momente an den Laststellen C und $C_1$:

$$\mathfrak{M} = Aa \qquad \mathfrak{M}_1 = Bb_1$$

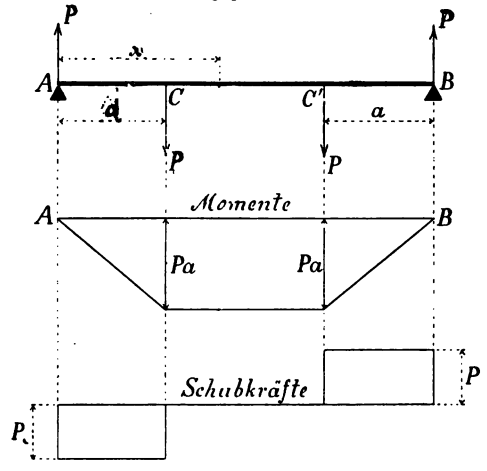
Es ist in jedem einzelnen Falle zu untersuchen, welches dieser Momente das größere ist; das größte Moment ist = k W zu setzen und danach der Träger zu berechnen.

Fig. 50.




Sind die beiden Lasten einander gleich (= P) und greifen dieselben in der gleichen Entfernung a von den Auflagern an, so entsteht der in Fig. 51 dargestellte einfachere Fall.

Fig. 51.




Die Stützenwiderstände sind hier:

$$A = B = P$$

Das Moment ist in den Auflagerpunkten = Null und wächst von dort ab gleichmäßig bis zu den Laststellen, wo es die Größe annimmt:

$$\mathfrak{M} = P\,a$$

Zwischen den Laststellen bleibt das Moment unveränderlich, denn für eine Stelle in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{M}_x = P\,x - P\,(x - a) = P\,a$$

P a ist also zugleich das größte Moment, daher:

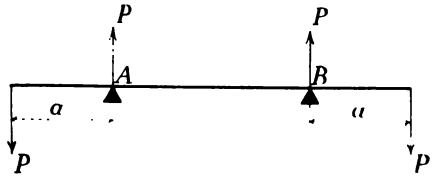
$$P\,a = k\,W$$

Die Schubkraft S hat zwischen den Laststellen C und C' die Größe Null.

Vertauscht man in Fig. 51 die Lasten mit den Stützenwiderständen und denkt sich die ganze Figur herumgedreht, so erhält man den in Fig. 52 dargestellten Belastungsfall.

Die Berechnung dieses Trägers, bei welchem das Moment zwischen den Stützpunkten die unveränderliche Größe P a hat, geschieht in derselben Weise wie

Fig. 52.




bei dem Träger Fig. 51. Die Trägerlänge zwischen den Stützpunkten ist in diesem, sowie auch in dem vorigen Falle (Fig 51) unter der Voraussetzung, daß der Träger selbst als gewichtlos betrachtet werden kann, ganz ohne Einfluß auf die Tragfähigkeit, da in dem größten Momente P a die Trägerlänge nicht erscheint.

Wirkt außer den Kräften P, welche an den Enden des über die Stützpunkte um das Stück a hinausragenden Trägers angreifen, innerhalb der Auflager noch eine Kraft $P_1$ und teilt diese die Stützlänge l in die Abschnitte $a_1$ und $b_1$ (Fig. 53), so sind die Stützenwiderstände:

$$A = P + \frac{P_1 b_1}{l}$$

$$B = P + \frac{P_1 a_1}{l}$$

Das Moment bei C hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_c = A a_1 - P (a + a_1)$$

und wenn für A der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M}_c = P_1 \frac{a_1 b_1}{l} - P a$$

Das Moment über den Stützen hat die absolute Größe:

$$\mathfrak{M} = P a$$

Die Tragfähigkeit des Trägers wird voll ausgenutzt, wenn die Momente einander gleich sind.

Setzt man $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$, so folgt:

$$2 P a = P_1 \frac{a_1 b_1}{l}$$

oder:

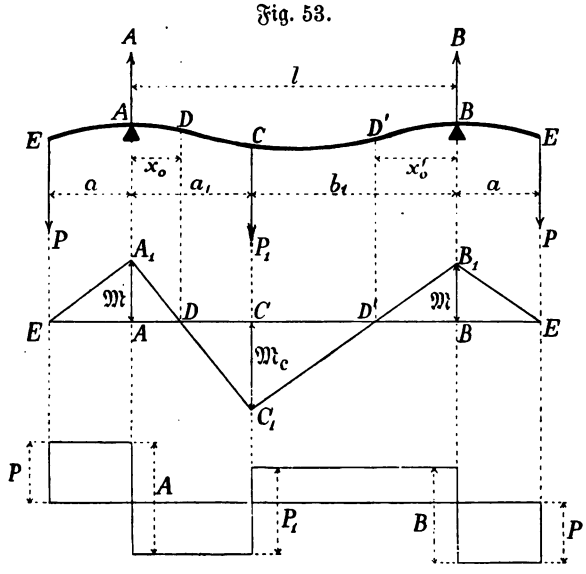
$$a = \frac{P_1}{P} \cdot \frac{a_1 b_1}{2 l}$$

Danach:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = \frac{P_1}{2} \frac{a_1 b_1}{l}$$

Das Moment im Laſtpunkte C erteilt dem Balken eine Biegung, welche gerade entgegengeſetzt der durch die Stützenmomente hervorgebrachten Biegung iſt. Während über den Stützen die oberen Faſern des Balkens gezogen werden, ſind bei C die oberen Faſern gedrückt. Zwiſchen den Stützpunkten A und B müſſen

Fig. 53.




daher zwei Punkte D und D' liegen, in denen die eine Biegung in die andere übergeht, wo alſo überhaupt keine Biegung ſtattfindet, das Biegungsmoment in dieſen Punkten daher = Null iſt.

Man findet die Lage dieſer Punkte, wenn man die Momente in den Abſtänden x und x' von den Stützpunkten A bezw. B, nämlich:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - P\,(a + x)$$
$$\mathfrak{M}_{x'} = B\,x' - P\,(a + x')$$

= Null ſetzt. Bezeichnet man die Werte von x bezw. x', für welche dieſe Momente = Null werden, mit $x_0$ und $x_0'$, ſo erhält man:

$$x_0 = \frac{P\,a}{A - P}$$

$$x_0' = \frac{P\,a}{B - P}$$

In der graphiſchen Darſtellung der Momente ergeben ſich die Punkte D und D' als Schnittpunkte der Geraden $A_1 C_1$ und $B_1 C_1$ mit der E E.

Sind die Laſten unter ſich gleich, alſo $P_1 = P$, und iſt außerdem $a_1 = b_1 = \frac{l}{2}$, ſo vereinfachen ſich die obigen Ergebniſſe.

Es wird:

$$A = B = \frac{3}{2} P$$

$$\mathfrak{M}_c = \frac{P l}{4} - P a$$

$$\mathfrak{M} = P a$$

Sollen die Stützenmomente gleich dem Momente in der Mitte des Trägers ſein, ſo folgt aus:

$$P a = \frac{P l}{4} - P a$$

$$a = \frac{l}{8}$$

Danach wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P l}{8}$$

und

$$x_0 = x_0' = \frac{\frac{P l}{8}}{\frac{3}{2} P - P} = \frac{l}{4}$$

Iſt ein auf den Stützen A und B aufgelagerter Träger, welcher über die eine Stütze B um das Stück a hinausragt, am freien Ende durch die Kraft P belaſtet und hat derſelbe außerdem noch eine Laſt $P_1$ zu tragen, welche innerhalb der Stützen angreift und die Stützlänge l in die Abſchnitte $a_1$ und $b_1$ teilt, ſo iſt nach Fig. 54 in Bezug auf den Drehpunkt B:

$$A l - P_1 b_1 + P a = 0$$

in Bezug auf den Drehpunkt A:

$$- B l + P_1 a_1 + P (a + l) = 0$$

Aus dieſen Gleichungen ergeben ſich die Stützenwiderſtände:

$$A = \frac{P_1 b_1 - P a}{l}$$

$$B = \frac{P_1 a_1 + P (a + l)}{l}$$

Aus der erſten dieſer Gleichungen folgt, daß für $P a > P_1 b_1$ der Stützenwiderſtand A negativ wird, d. h. von oben nach unten wirkt.

Für $P a = P_1 b_1$ wird $A =$ Null.

In beiden Fällen entſteht bei B das Maximalmoment:

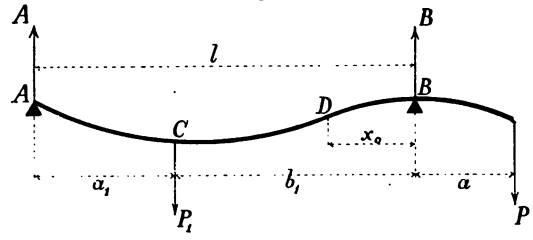
$$\mathfrak{M}_b = P a$$

Ist $P\,a < P_1\,b_1$, so wird A positiv. Es entsteht dann im Lastpunkte C ein zweites Maximalmoment von der Größe:

$$\mathfrak{M}_c = A\,a_1 = \frac{P_1\,b_1 - P\,a}{l} \cdot a_1$$

Welches von diesen beiden Momenten das absolut größte ist, muß für jeden einzelnen Fall untersucht werden. Das größte Moment ist dann $= k\,W$ zu setzen und der Balken danach zu berechnen.

Fig. 54.




Die Tragfähigkeit des Balkens wird voll ausgenutzt, wenn die Momente einander gleich sind. Setzt man $\mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}_c$, so folgt:

$$P\,a = \frac{P_1\,b_1 - P\,a}{l} \cdot a_1$$

oder:

$$a = \frac{P_1}{P}\,\frac{a_1\,b_1}{l + a_1}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes wird dann:

$$\mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}_c = P_1\,\frac{a_1\,b_1}{l + a_1}$$

Das Moment $\mathfrak{M}_b$ erteilt dem Balken eine Biegung, welche gerade entgegengesetzt der durch das Moment $\mathfrak{M}_c$ hervorgebrachten Biegung ist. Zwischen den Punkten C und B muß sich daher ein Punkt D befinden, in welchem die eine Biegung in die andere übergeht, das Moment also $=$ Null ist.

Die Entfernung $x_o$ dieses Punktes von der Stütze B ergibt sich dann aus der Bedingung:

$$P\,(a + x_o) - B\,x_o = 0$$

zu:

$$x_o = \frac{P\,a}{B - P}$$

Für den Fall, daß $P_1 = P$ und außerdem $a_1 = b_1 = \frac{l}{2}$ ist, erhält man:

$$A = \frac{P\,\frac{l}{2} - P\,a}{l} = P\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l}\right)$$

$$B = \frac{P\frac{l}{2} + P(a+l)}{l} = P\left(\frac{3}{2} + \frac{a}{l}\right)$$

$$M_b = P\,a$$

$$M_c = \frac{P\,l}{4} - \frac{P\,a}{2}$$

Sollen die Momente einander gleich werden, so folgt aus:

$$P\,a = \frac{P\,l}{4} - \frac{P\,a}{2}$$

$$a = \frac{l}{6}$$

Danach wird:

$$M = \frac{P\,l}{6}$$

und:

$$x_0 = \frac{P\,a}{P\left(\frac{3}{2} + \frac{a}{l}\right) - P} = \frac{a}{\frac{1}{2} + \frac{a}{l}} = \frac{3}{2}\,a = \frac{l}{4}$$

## 2. Streckenbelastung.

Ist ein an den Endpunkten unterstützter Träger A B von der Länge $l$ (Fig. 55) gleichmäßig belastet und bezeichnet man die Belastung für die Längeneinheit mit $p$, so ist die Gesamtbelastung $= p\,l$. Der Angriffspunkt derselben liegt im Schwerpunkte der Belastungsfläche, also in der Mitte des Trägers. Die Belastung wird zur Hälfte auf jedes Auflager übertragen, folglich sind die Stützenwiderstände:

$$A = B = \frac{p\,l}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

Denkt man sich den Träger in der Entfernung $x$ vom Auflager A zerschnitten und betrachtet das linke Stück desselben, so sind der Stützenwiderstand $\frac{p\,l}{2}$ und die Belastung $p\,x$ die auf das Trägerstück wirkenden äußeren Kräfte. Die Belastung $p\,x$ greift im Schwerpunkte der Belastungsfläche, also in der Entfernung $\frac{x}{2}$ von der Schnittstelle an. Stellt man in Bezug auf die Schnittstelle die Momentengleichung auf, so ergibt sich:

$$M_x = \frac{p\,l}{2}\,x - p\,x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_x = \frac{p}{2}\,x\,(l - x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 52)$$

Für $x = 0$ und $x = l$ wird $M_x = 0$, d. h. das Moment an den Stützpunkten ist $=$ Null.

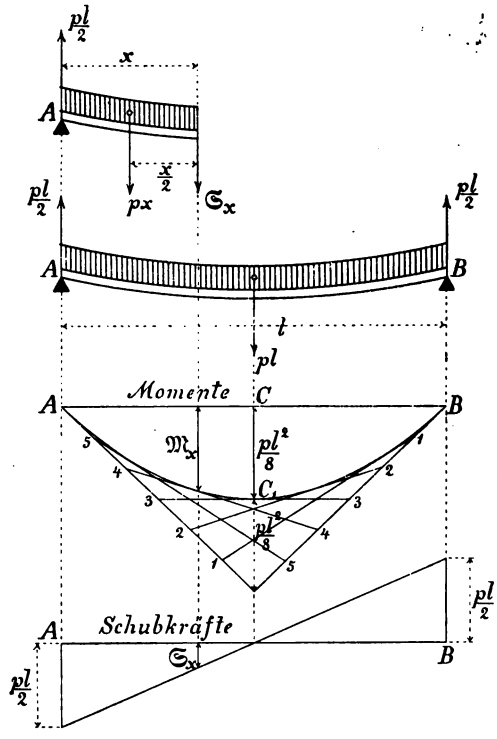
Das größte Moment findet in der Mitte des Trägers statt. Es ist nämlich für $x = {}^1/_2\, l$:

$$x\,(l - x) = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4}.$$

Dagegen ergibt sich für $x = {}^1/_2\, l + \lambda$ oder $x = {}^1/_2\, l - \lambda$ der kleinere Wert:

$$x\,(l - x) = \left(\frac{l}{2} + \lambda\right)\left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = \frac{l^2}{4} - \lambda^2$$

Fig. 55.




Aus Gl. 52) folgt danach für $x = {}^1/_2\, l$:

$$\mathfrak{M}_{max} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{l} \cdot \frac{\mathfrak{l}}{8} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 53)$$

Das größte Moment bei dem gleichmäßig belasteten Träger ist gleich der ganzen Belastung multipliziert mit dem achten Teil der Trägerlänge.

Die graphische Darstellung der Momente ist nach Gl. 52) eine Parabel $A\,C_1\,B$, deren Scheitel in $C_1$ liegt und deren Pfeilhöhe $C\,C_1 = p\,l \cdot \frac{l}{8}$ ist.

Die Schubkraft in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{S}_x = \frac{p\,l}{2} - p\,x$$

ändert sich also in geradem Verhältnis mit x.

Im Auflager, also für $x = 0$, wird:

$$\mathfrak{S}_{max} = \frac{p\,l}{2}$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird:

$$\mathfrak{S} = 0$$

Die Schubkraft erreicht ihren größten Wert an den Stellen, wo das Moment = Null ist (an den Auflagern) und wird = Null an der Stelle, wo das größte Moment stattfindet (in der Trägermitte)*).

Setzt man $M_{max} = k\,W$, so erhält man zur Berechnung des Trägers die Gleichung:

$$\mathbf{p\,l \cdot \frac{l}{8} = k\,W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{54)}$$

Aus Gl. 48) S. 60 und aus Gl. 54) erkennt man, daß ein gleichmäßig belasteter Balken doppelt so viel trägt, als wenn dieselbe Belastung $p\,l = P$ als Einzelkraft in der Mitte des Balkens wirkt.

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte G des Trägers, so erhält man die Gleichung:

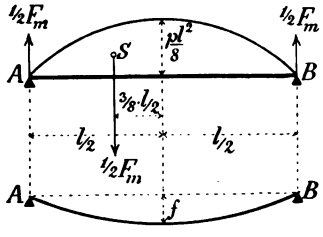
$$G \cdot \frac{l}{8} = k\,W$$

welche in der Form:

$$l = \frac{8\,k\,W}{G}$$

zur Bestimmung der Länge l dienen kann, welche ein prismatischer Balken höchstens haben darf, um sein eigenes Gewicht noch mit Sicherheit tragen zu können.

Fig. 56.




Zur Berechnung der Durchbiegung f denke man sich den Träger durch die M-Fläche belastet (Fig. 56). Der Inhalt derselben ist:

$$F_m = \tfrac{2}{3}\,l \cdot \frac{p\,l^2}{8} = \frac{p\,l^3}{12}$$

und das Moment in Bezug auf die Trägermitte:

$$\tfrac{1}{2}\,F_m \cdot \frac{l}{2} - \tfrac{1}{2}\,F_m \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p\,l^3}{12} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p\,l^3}{12} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{384}\,p\,l^4$$

*) Der allgemeine Beweis dieses Satzes für einen beliebig belasteten Träger ist S. 73 gegeben.

Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich die Durchbiegung nach Gl. 34) S. 44 zu:

$$f = \frac{5}{384}\,\frac{p\,l^4}{EJ}$$

Setzt man hierin:

$$\frac{p\,l^2}{8} = k\,\frac{J}{e}$$

so folgt:

$$\boxed{f = \frac{5}{48}\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{e}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

Bei den zu Deckenkonstruktionen verwendeten Trägern hält man gewöhnlich die Bestimmung ein, daß die Durchbiegung bei voller Belastung nicht mehr als $^1/_{600}$ der Spannweite betragen soll.

Setzt man $f = {}^1/_{600}\,l$, ferner $k = 1000$ und $E = 2000000$ (für Schmiedeeisen) in Gl. 55) ein, so erhält man:

$$\frac{l}{600} = \frac{5}{48}\,\frac{1000}{2000000}\,\frac{l^2}{0{,}5\,h}$$

woraus folgt:

$$\boxed{h = \frac{1}{16}\,l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 56)$$

Diese theoretisch erforderliche Trägerhöhe hält man praktisch häufig nicht ein. Da nämlich in Wirklichkeit die Deckenträger an den Enden immer eingemauert sind und infolgedessen wenigstens als teilweise eingespannte Träger (vergl. 4, § 10) betrachtet werden können, bei denen die Durchbiegung unter denselben Umständen wesentlich geringer ist, als bei den frei auf zwei Endstützen ruhenden Trägern, so genügt es zu setzen:

$$h = \frac{1}{25}\,l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 57)$$

Man stellt danach praktisch die Forderung:

Die Stützweite der Träger soll mit Rücksicht auf die Durchbiegung nicht mehr als das 25fache der Trägerhöhe betragen.

Ragt ein auf zwei Stützen ruhender gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belasteter Träger um ein Stück a über die Stützpunkte hinaus (Fig. 57) und bezeichnet man die Stützweite wieder mit l, so sind die Stützenwiderstände:

$$A = B = p\left(\frac{l}{2} + a\right)$$

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,(a+x)^2}{2}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{2}\,x\,(l - x) - \frac{p\,a^2}{2}$$

Die größten Momente finden über den Stützen und in der Mitte des Trägers statt.

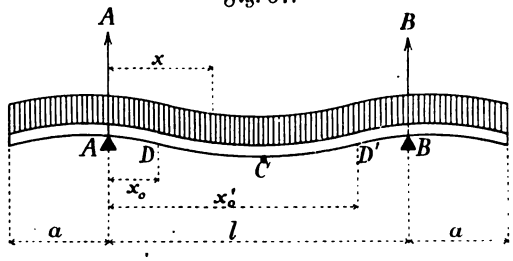
Für $x = 0$ und $x = l$ werden die Stützenmomente

$$\mathfrak{M} = -\frac{p a^2}{2}$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird das Moment in der Trägermitte:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p l^2}{8} - \frac{p a^2}{2}$$

Fig. 57.




Um diejenige Größe von a zu ermitteln, bei welcher alle drei Momente einander gleich werden, der Balken also die größte Tragfähigkeit besitzt, hat man den absoluten Wert von $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$ zu setzen:

$$\frac{p a^2}{2} = \frac{p l^2}{8} - \frac{p a^2}{2}$$

Daraus folgt:

$$a = \frac{l}{\sqrt{8}}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich dann für die Momente die Größe:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = p l \cdot \frac{l}{16}$$

Ist $a < \frac{l}{\sqrt{8}}$, so wird das Moment in der Trägermitte größer als die Stützenmomente.

Ist $a > \frac{l}{\sqrt{8}}$, so werden die Stützenmomente am größten, die gefährlichen Querschnitte des Trägers liegen dann über den Stützen.

Der Balken erhält durch die Stützenmomente eine Biegung, bei welcher die erhabene Seite nach oben gerichtet ist, durch das Moment in der Mitte aber eine entgegengesetzte Biegung. Man erhält die Lage der zwischen den Stützen liegenden Punkte D und D', in denen eine Krümmung in die andere übergeht, indem man $\mathfrak{M}_x = \text{Null}$ setzt.

$$\frac{p}{2} x (l - x) - \frac{p a^2}{2} = 0$$

$$x^2 - l x = -a^2$$

Bezeichnet man die Wurzeln dieser Gleichung mit $x_0$ und $x_0'$, so ergibt sich:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - a^2}$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - a^2}$$

Für den besonderen Fall, daß $a = \frac{l}{\sqrt{8}}$ angenommen wird, erhält man:

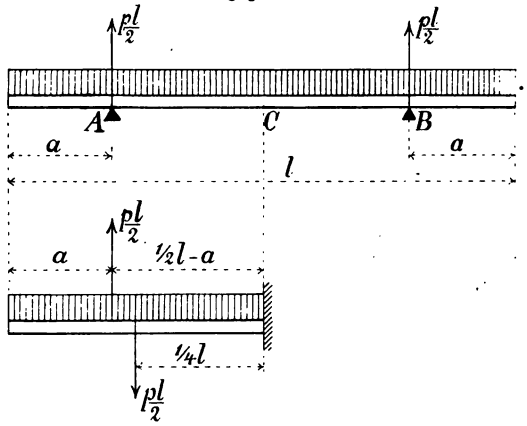
$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{l}{\sqrt{8}} = \frac{l}{2} - a$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{8}} = \frac{l}{2} + a$$

Wird nicht die Stützweite, sondern die ganze Trägerlänge mit $l$ bezeichnet (Fig. 58), so sind die Stützenwiderstände:

$$A = B = \frac{pl}{2}$$

Fig. 58.




Das Moment für die Trägermitte C ist:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{pl}{2}\left(\frac{l}{2} - a\right) - \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{pl}{2}\left(\frac{l}{4} - a\right)$$

Die Stützenmomente haben den absoluten Wert:

$$\mathfrak{M} = \frac{pa^2}{2}$$

Der Balken besitzt die größte Tragfähigkeit, wenn $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$ wird.

Aus:

$$\frac{pa^2}{2} = \frac{pl}{2}\left(\frac{l}{4} - a\right)$$

folgt dann:

$$a^2 + l\,a = \frac{l^2}{4}$$

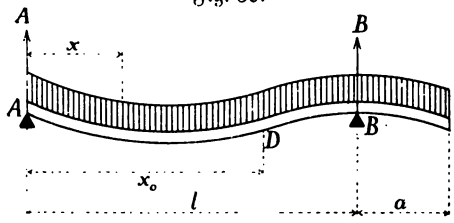
$$a = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0{,}2071\,.\,l$$

Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich dann für die Momente die Größe:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = \frac{p\,l^2}{8}(3 - 2\sqrt{2}) = 0{,}02145\,p\,l^2$$

Ragt ein auf zwei Stützen ruhender, gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belasteter Träger von der Stützweite l um ein Stück a über den einen

Fig. 59.




Stützpunkt hinaus (Fig. 59), und stellt man die Gleichungen der statischen Momente auf, so ist in Bezug auf den Drehpunkt B:

$$A\,l - \frac{p\,l^2}{2} + \frac{p\,a^2}{2} = 0\,.$$

und in Bezug auf den Drehpunkt A:

$$-B\,l + \frac{p\,l^2}{2} + p\,a\left(l + \frac{a}{2}\right) = 0$$

Daraus ergeben sich die Stützenwiderstände:

$$A = \frac{p}{2\,l}(l^2 - a^2)$$

$$B = \frac{p}{2\,l}(l + a)^2$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, daß für $a > l$ der Stützenwiderstand A negativ wird. Für $a = l$ wird $A =$ Null.

In beiden Fällen entsteht bei B das Maximalmoment:

$$\mathfrak{M}_B = \frac{p\,a^2}{2}$$

Ist $a < l$, so wird A positiv. Es entsteht dann zwischen den Stützpunkten A und B ein zweites Maximalmoment von der Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{p\,x_o{}^2}{8}$$

wobei $x_o$ die Entfernung des Punktes D (d. i. desjenigen Punktes, in welchem das Moment = Null wird) von dem Stützpunkt A bedeutet.

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager A ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,x^2}{2}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{2\,l}\,(l^2 - a^2)\,x - \frac{p\,x^2}{2}$$

Dieses Moment wird = Null am Auflager A, d. h. für $x = 0$ und außerdem für:

$$x_0 = \frac{l^2 - a^2}{l}$$

Danach wird dann:

$$\mathfrak{M} = \frac{p}{8}\left(\frac{l^2 - a^2}{l}\right)^2$$

Um diejenige Größe von a zu ermitteln, bei welcher der Balken die größte Tragfähigkeit besitzt, hat man die Momente $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_B$ einander gleich zu setzen.

$$\frac{p}{8}\left(\frac{l^2 - a^2}{l}\right)^2 = \frac{p\,a^2}{2}$$

Daraus folgt:

$$a = l\,(\sqrt{2} - 1) = 0{,}4142\,.\,l$$

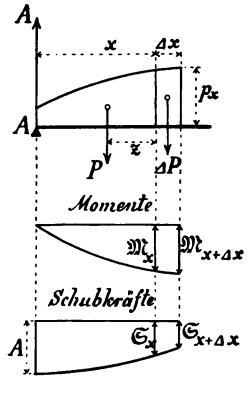
Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich:

$$x_0 = 0{,}8284\,.\,l = 2\,a$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_B = 0{,}0858\,p\,l^2$$

Ist die Belastung eines Trägers unsymmetrisch, so läßt sich die Lage des gefährlichen Querschnittes am einfachsten dadurch bestimmen, daß man die Stelle aufsucht, wo die Schubkraft = Null ist. An derselben Stelle erreicht das Moment seinen größten Wert.

Fig. 60.




Ein einfacher Beweis dieses Satzes, welcher für den besonderen Fall des gleichmäßig auf seine ganze Länge belasteten Trägers schon S. 68 angeführt war, ist folgendermaßen:

Bei dem beliebig belasteten Träger (Fig. 60) hat für eine Stelle in der Entfernung x vom Auflager A die Schubkraft die Größe:

$$\mathfrak{S}_x = A - P$$

Wächst x um das sehr kleine Stück $\Delta x$ an, so entsteht:

$$\mathfrak{S}_{x+\Delta x} = A - (P + \Delta P)$$

Danach beträgt die Aenderung der Schubkraft, während x um $\Delta x$ anwächst:

$$\Delta\,\mathfrak{S}_x = \mathfrak{S}_{x+\Delta x} - \mathfrak{S}_x = -\Delta P = -p_x\,.\,\Delta x \quad . \quad . \quad . \quad 58)$$

Für die Momente an den Stellen in den Entfernungen x und $x + \Delta x$ von A erhält man die Ausdrücke:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - P\,z$$

$$\mathfrak{M}_{x+\Delta x} = A\,(x + \Delta x) - P\,(z + \Delta x) - \Delta P \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

oder da das letzte Glied $\Delta P \cdot \frac{\Delta x}{2}$ wegen Kleinheit vernachlässigt werden kann:

$$\mathfrak{M}_{x+\Delta x} = A\,(x + \Delta x) - P\,(z + \Delta x)$$

Die Zunahme des Moments beträgt danach:

$$\Delta \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{x+\Delta x} - \mathfrak{M}_x = A\,\Delta x - P\,\Delta x = (A - P)\,\Delta x$$

und wenn für $(A - P)$ der obige Wert $\mathfrak{S}_x$ eingesetzt wird:

$$\Delta \mathfrak{M}_x = \mathfrak{S}_x \cdot \Delta x \quad \ldots\ldots\ldots \quad 59)$$

d. h. die Zunahme des Moments von einer Stelle in der Entfernung x bis zu der nächstfolgenden Stelle in der Entfernung $x + \Delta x$ vom Auflagerpunkte A ist gleich dem Flächeninhalt des lotrecht darunter liegenden Streifens der Schubkraftfläche.

Aus Gl. 59) folgt bei der zeichnerischen Darstellung der Momente:

Wird $\mathfrak{S}_x = \text{Null}$, so wird auch $\Delta \mathfrak{M}_x = \text{Null}$, d. h. *das Moment $\mathfrak{M}$ erreicht seinen größten Wert an der Stelle, wo die Schubkraft $\mathfrak{S} = \text{Null}$* ist (oder bei einer Einzellast von + in − übergeht).

Durch Summierung vom Auflagerpunkte A ab, also von $x = \text{Null}$ ab gerechnet, entsteht aus Gl. 59)

$$\mathfrak{M}_x = \Sigma\,(\mathfrak{S}_x \cdot \Delta x) = [\text{S-Fläche}]_0^x \quad \ldots\ldots \quad 60)$$

oder in Worten: *Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist gleich dem Inhalt der lotrecht unter der Strecke x liegenden Schubkraftfläche*; also gleich demjenigen Teil der Schubkraftfläche, welcher begrenzt ist einerseits von der Auflager-Lotrechten, andererseits von der durch den Endpunkt von x gezogenen Lotrechten.

Aus Gl. 60) folgt:

*Das Moment $\mathfrak{M}$ wird $= \text{Null}$ bei dem Querschnitt, für welchen die Schubkraftfläche* (bestehend aus positiven und negativen Teilen) $= \text{Null}$ *wird*, beim Träger auf zwei Endstützen also an den Auflagern.

Die Belastungsfläche des Trägers A B (Fig. 61) bilde ein Dreieck mit der Höhe p bei dem Auflager B. Es ist dann:

$$A = \left(\frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{3}\right) : l = \frac{p\,l}{6}$$

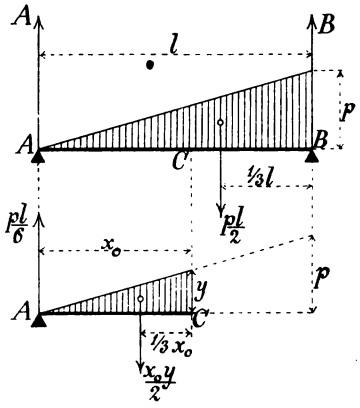
Wird die Entfernung der Stelle, wo die Schubkraft $= \text{Null}$ ist, vom Auflager A mit $x_0$ und die Belastungshöhe an dieser Stelle mit y bezeichnet, so erhält man zunächst:

$$y = \frac{p\,x_0}{l}$$

und danach die Belastung des Stückes AC:

$$\frac{x_0\, y}{2} = \frac{p\, x_0^2}{2\, l}$$

Fig. 61.




Aus der Bedingung: $\frac{x_0\, y}{2} = A$ oder:

$$\frac{p\, x_0^2}{2\, l} = \frac{p\, l}{6}$$

folgt dann

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Das an dieser Stelle entstehende größte Moment ergibt sich zu:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l}{6}\, x_0 - \frac{p\, x_0^2}{2\, l} \cdot \frac{x_0}{3}$$

und wenn für $x_0$ der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l^2}{9\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 61)$$

Für den symmetrischen Belastungsfall (Fig. 62) (Belastungshöhe in der Trägermitte = p, an den Auflagern = Null) ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l}{4}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right) = \frac{p\, l^2}{12} \quad \ldots\ldots \quad 62)$$

Ist umgekehrt die Belastungshöhe an den Auflagern = p und in der Trägermitte = Null (Fig. 63), so wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l}{4}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right) = \frac{p\, l^2}{24} \quad \ldots\ldots \quad 63)$$

Die Addition der Gleichungen 62) und 63) ergibt wieder das Maximalmoment des gleichmäßig mit p auf die ganze Länge l belasteten Trägers (vergl. Gl. 53) S. 67) zu:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\,l^2}{8}$$

Fig. 62.

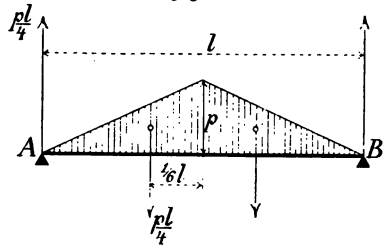
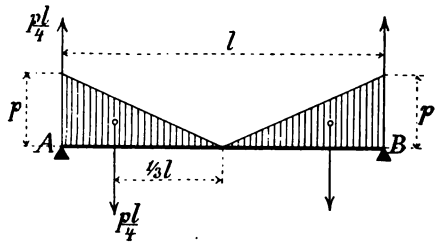



Fig. 63.




Der Träger A B (Fig. 64) sei von A bis C gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belastet. Man erhält die Stützenwiderstände A und B, indem man sich die gleichmäßig verteilte Belastung im Schwerpunkte der Belastungsfläche vereinigt denkt, aus den Momentengleichungen:

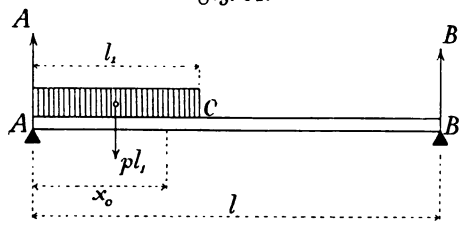
$$A\,l - p\,l_1\,(l - {}^1\!/_2\,l_1) = 0$$

$$B\,l - p\,l_1 \,.\, {}^1\!/_2\,l_1 = 0$$

zu:

$$A = \frac{p\,l_1\,(l - {}^1\!/_2\,l_1)}{l}; \qquad B = \frac{p\,l_1{}^2}{2\,l}$$

Fig. 64.




Hat nun die Stelle, wo die Schubkraft = Null ist, die Entfernung $x_0$ vom Auflager A, so ergibt sich $x_0$ aus der Bedingung $p\,x_0 = A$ zu:

$$x_0 = \frac{A}{p}$$

Das Moment an dieser Stelle hat die Größe:

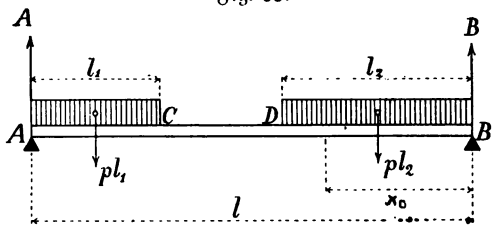
$$\mathfrak{M}_{max} = A\,x_0 - \frac{p\,x_0{}^2}{2} = \frac{p\,x_0{}^2}{2}$$

Für den Belastungsfall (Fig. 65), bei welchem man sich die gleichmäßig verteilten Belastungen wieder in den Schwerpunkten der Belastungsflächen vereinigt zu denken hat, erhält man:

$$A = \frac{p\,l_1\,(l - {}^1/_2\,l_1) + p\,l_2\,.\,{}^1/_2\,l_2}{l}$$

$$B = \frac{p\,l_1\,.\,{}^1/_2\,l_1 + p\,l_2\,(l - {}^1/_2\,l_2)}{l}$$

Fig. 65.




Ist $l_2 > l_1$, so ergibt sich die Größe $x_0$, das ist die Entfernung der Stelle, wo die Schubkraft = Null ist, wo also zugleich das Biegungsmoment seinen größten Wert erreicht, vom Auflager B aus der Bedingung $p\,x_0 = B$ zu:

$$x_0 = \frac{B}{p}$$

folglich wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = B\,x_0 - \frac{p\,x_0{}^2}{2} = \frac{p\,x_0{}^2}{2}$$

## 3. Zusammengesetzte Belastung.

Wirkt auf einen an den Enden unterstützten, gleichmäßig durch p für die Längeneinheit belasteten Balken noch eine Einzelkraft P (Fig. 66), so setzt sich das Moment für eine beliebige Stelle des Balkens zusammen aus zwei Teilen, nämlich aus einem Beitrage, herrührend von der gleichmäßig über die Länge verteilten Belastung und aus dem Beitrage, den die Einzelkraft P liefert. Diese Beiträge sind einzeln für sich zu berechnen und zu addieren.

Die Stützenwiderstände sind:

$$A = \frac{p\,l}{2} + \frac{P\,b}{l}$$

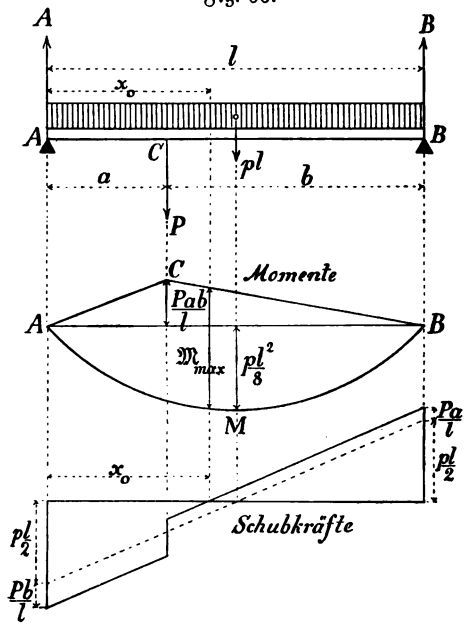
$$B = \frac{p\,l}{2} + \frac{P\,a}{l}$$

Das größte Moment findet entweder im Lastpunkt C statt oder es liegt zwischen der Trägermitte und dem Lastpunkte C und kann dann abgegriffen werden aus der graphischen Darstellung der Momente, welche sich zusammensetzt aus dem

Dreiecke A B C mit der Höhe P $\frac{a\,b}{l}$ als Beitrag der Einzellast P, und aus der Parabel A M B mit der Pfeilhöhe $\frac{p\,l^2}{8}$ als Beitrag der gleichmäßigen Belastung.

Genauer erhält man die Lage des gefährlichen Querschnitts, indem man die Stelle aufsucht, wo die Schubkraft = Null ist.

Fig. 66.




Ist $x_0$ die Entfernung dieser Stelle vom Auflager A, so ist:

$$A - P - p\,x_0 = 0$$

also:

$$x_0 = \frac{A - P}{p}$$

Das Maximalmoment hat dann die Größe:

$$\mathfrak{M}_{max} = A\,x_0 - P\,(x_0 - a) - \frac{p\,x_0^2}{2}$$

worin für $x_0$ der obige Wert einzusetzen ist.

Für den Fall daß:

$$a = b = \frac{l}{2}$$

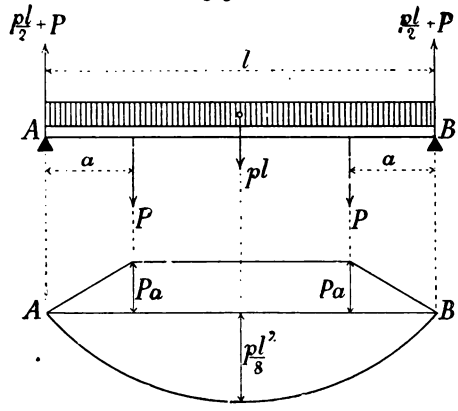
ist, liegt das Maximalmoment in der Mitte des Trägers und hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{P\,l}{4} + p\,l \,.\, \frac{l}{8}$$

Für den symmetrischen Belastungsfall Fig. 67 liegt der gefährliche Querschnitt ebenfalls in der Trägermitte und der Träger ist zu berechnen aus der Gleichung:

$$P\,a + p\,l\,.\,\frac{l}{8} = k\,W$$

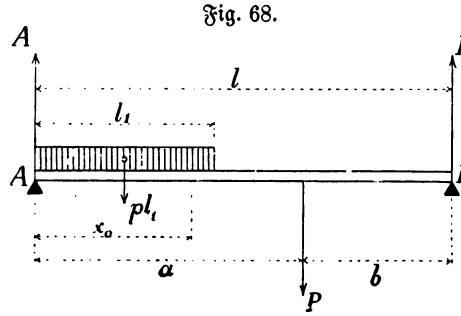
Fig. 67.




Erstreckt sich die gleichmäßig verteilte Belastung nur über einen Teil $l_1$ des Trägers und wirkt außerdem die Einzellast P auf denselben, so ist nach Fig. 68:

$$A = \frac{P\,b}{l} + p\,l_1\,\frac{(l - {}^1/_2\,l_1)}{l}$$

Fig. 68.




Wird die Entfernung des gefährlichen Querschnittes vom Auflager A wieder mit $x_0$ bezeichnet, so ist:

$$A - p\,x_0 = 0 \text{ oder } x_0 = \frac{A}{p}$$

und danach das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = A\,x_0 - \frac{p\,x_0^2}{2} = \frac{p\,x_0^2}{2}$$

Aufgabe 29. Ein an den Enden frei aufliegender Balken aus Eichenholz von 420 cm Länge ist 150 cm vom Auflager durch ein Gewicht von 900 kg belastet. Welchen Querschnitt muß derselbe erhalten, wenn sich die Breite zur Höhe wie 5 : 7 verhalten soll und eine Inanspruchnahme k = 80 kg/qcm gestattet ist?

Auflösung. Da hier:

$$a = 150 \text{ cm}$$

$$b = 420 - 150 = 270 \text{ cm}$$

in Gl. 47) S. 59 einzusetzen ist, so ist das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = 900 \cdot \frac{150 \cdot 270}{420} = 86786$$

und das erforderliche Widerstandsmoment:

$$W = \frac{86786}{80} = 1085$$

Da nun für $b = {}^5/_7\, h$

$$W = \frac{{}^5/_7\, h \cdot h^2}{6} = \frac{5}{42} h^3$$

ist, so erhält man:

$$\frac{5}{42} h^3 = 1085$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{42}{5} \cdot 1085} = \sim 21 \text{ cm}$$

$$b = \frac{5}{7} h = 15 \text{ cm}$$

Aufgabe 30. Ein mit den Enden frei aufliegender I-Träger Nr. 20 von 600 cm Länge ist in der Mitte durch ein Gewicht von 1400 kg belastet; wie groß ist die Inanspruchnahme k?

Auflösung. Die allgemeine Gleichung (Gl. 48) S. 60) lautet:

$$\frac{P\,l}{4} = k\,W$$

Nach Tabelle 2 § 6 ist:

$$W = 214$$

daher:

$$k = \frac{1400 \cdot 600}{4 \cdot 214} = 981 \text{ kg}$$

Aufgabe 31. Welche Einzellast P kann ein 400 cm langer, mit den Enden frei aufliegender Balken aus Kiefernholz, dessen Breite = 18 cm und dessen Höhe = 24 cm ist, in der Mitte tragen (k = 60 kg vorausgesetzt) und wie groß ist die Durchbiegung f?

Auflösung. Da nach Tabelle 15 § 6 S. 40:

$$W = 1728$$

ist, so wird nach Gl. 48) S. 60:

$$P = \frac{4\,k\,W}{l} = \frac{4 \cdot 60 \cdot 1728}{400} = 1037 \text{ kg}$$

und nach Gl. 49) S. 60:

$$f = \frac{1}{12} \frac{60}{120000} \cdot \frac{400^2}{12} = 0{,}56 \text{ cm}$$

Aufgabe 32. Ein I-Träger von 600 cm Länge ist nach Fig. 69 belastet. Es soll das Profil des Trägers ohne Berücksichtigung des Eigengewichts berechnet werden ($k = 1000$ kg).

Auflösung. Der Stützenwiderstand A hat die Größe:

$$A = \frac{400 \cdot 450 + 500 \cdot 350 + 600 \cdot 250 + 800 \cdot 100}{600} = 975$$

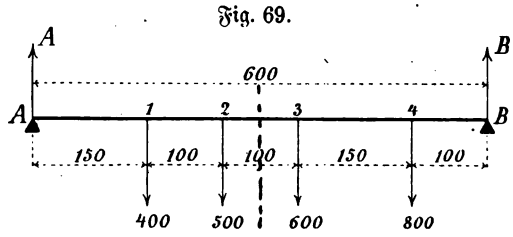
Die Gesamtbelastung beträgt:

$$400 + 500 + 600 + 800 = 2300 \text{ kg}$$

folglich ist:

$$B = 2300 - 975 = 1325 \text{ kg}$$

Fig. 69.




Für die Momente in den Lastpunkten 1, 2, 3, 4 ergeben sich die Größen:

$$\mathfrak{M}_1 = 975 \cdot 150 = 146250$$
$$\mathfrak{M}_2 = 975 \cdot 250 - 400 \cdot 100 = 203750$$
$$\mathfrak{M}_3 = 1325 \cdot 250 - 800 \cdot 150 = 211250$$
$$\mathfrak{M}_4 = 1325 \cdot 100 = 132500$$

Das Moment $\mathfrak{M}_3$ ist das größte, daher das erforderliche Widerstandsmoment:

$$W = \frac{211250}{1000} = 211$$

Es genügt Profil Nr. 20 mit $W = 214$.

Aufgabe 33. Es soll ein nach Fig. 53 S. 63 belasteter I-Träger berechnet werden unter Annahme folgender Größen:

$$P = 800 \text{ kg} \qquad a = 120 \text{ cm}$$
$$P_1 = 1200 \text{ kg} \qquad a_1 = 200 \text{ cm}$$
$$b_1 = 300 \text{ cm}$$
$$l = a_1 + b_1 = 500 \text{ cm}$$

Auflösung. Die Stützenwiderstände sind:

$$A = 800 + \frac{1200 \cdot 300}{500} = 1520$$

$$B = 800 + \frac{1200 \cdot 200}{500} = 1280$$

Das Moment über den Stützen hat die Größe:

$$\mathfrak{M} = P\,a = 800 \cdot 120 = 96000$$

Das Moment im Laſtpunkte C iſt:

$$\mathfrak{M}_c = P_1 \frac{a_1 b_1}{l} - P a$$

$$\mathfrak{M}_c = 1200 \cdot \frac{200 \cdot 300}{500} - 96000 = 48000$$

Der gefährliche Querſchnitt liegt alſo über den Stützen und das erforderliche Widerſtandsmoment iſt:

$$W = \frac{96000}{1000} = 96$$

Gewählt Profil Nr. 15 mit W = 97,9.

Aufgabe 34. Es ſoll unter Beibehaltung aller anderen Größen in Aufg. 33 die Länge a ſo gewählt werden, daß die Momente einander gleich ſind.

Auflöſung. Nach S. 62 (unten) iſt:

$$a = \frac{P_1}{P} \frac{a_1 b_1}{2 l} = \frac{1200}{800} \cdot \frac{200 \cdot 300}{2 \cdot 500} = 90 \text{ cm}$$

Danach wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P_1}{2} \frac{a_1 b_1}{l} = \frac{1200}{2} \cdot \frac{200 \cdot 300}{500} = 72000$$

$$W = \frac{72000}{1000} = 72$$

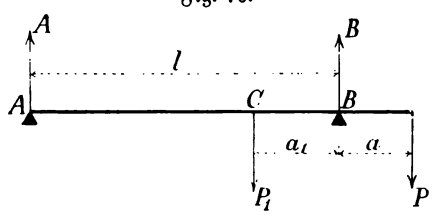
Gewählt Profil Nr. 14 mit W = 81,7.

Aufgabe 35. Ein Balken aus Eichenholz ſei nach Fig. 70 belaſtet und es ſei:

$P = 800$ kg $\quad a = 96$ cm
$P_1 = 3000$ kg $\quad a_1 = 100$ cm
$l = 360$ cm

Wie ſtark muß der Balken genommen werden bei k = 80 kg?

Fig. 70.




Auflöſung. In Bezug auf den Drehpunkt B iſt:

$$A l = P_1 a_1 - P a$$

folglich:

$$A = \frac{P_1 a_1 - P a}{l} = \frac{3000 \cdot 100 - 800 \cdot 96}{360} = 620 \text{ kg}$$

Das Moment im Punkte C iſt danach:

$$\mathfrak{M}_c = 620 (360 - 100) = 161200$$

Das Moment über der Stütze B hat die Größe:

$$\mathfrak{M} = P a = 800 \cdot 96 = 76800$$

Der Balken ist daher nach $M_c$ zu berechnen und erfordert das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{161200}{80} = 2015$$

Nach Tabelle 15 § 6 S. 40 genügt b = 18 cm, h = 26 cm.

Aufgabe 36. Eine $1^1/_2$ Stein (0,38 m) starke, 4 m breite und 12,5 m hohe Mauer soll durch zwei I-Eisen unterstützt werden. Welches Profil ist zu nehmen?

Auflösung. Der Rauminhalt der Mauer beträgt:

$$0{,}38 \cdot 4 \cdot 12{,}5 = 19 \text{ cbm}$$

Rechnet man das Kubikmeter Mauerwerk zu 1600 kg, so ist das Gewicht der ganzen Mauer:

$$1600 \cdot 19 = 30400 \text{ kg}$$

Die Gesamtbelastung eines Trägers beträgt daher:

$$p\,l = \frac{30400}{2} = 15200 \text{ kg}$$

Danach ist:

$$M_{max} = 15200\,\frac{400}{8} = 760000$$

$$W = \frac{760000}{1000} = 760$$

Gewählt Profil Nr. 32 mit W = 781.

Der Auflagerdruck eines Trägers hat die Größe:

$$A = \frac{p\,l}{2} = 7600 \text{ kg}$$

Legt man den Träger auf gewöhnliches Ziegelmauerwerk und nimmt an, daß sich der Druck gleichförmig auf die Unterstützungsmauer verteilt (was streng genommen nicht ganz zutreffend ist), rechnet man dabei als zulässige Inanspruchnahme k = 7 kg, so ergibt sich die erforderliche Auflagerfläche zu:

$$F = \frac{7600}{7} = 1086 \text{ qcm}$$

Setzt man:

$$F = a\,b$$

wo a die Auflagerlänge und b die Breite des Trägers bedeutet, so wird, da nach Tabelle 2 § 6:

$$b = 13{,}1 \text{ cm}$$

beträgt, die Auflagerlänge:

$$a = \frac{1086}{13{,}1} = \sim 83 \text{ cm}$$

Bei Holzbalken ist es Regel und im allgemeinen auch genügend, die Auflagerlänge gleich der Balkenhöhe zu nehmen. Bei Eisenträgern ist dies, wie schon aus obigem Beispiel hervorgeht, in vielen Fällen ganz ungenügend. Man sollte die I-Träger durch Werksteine unterstützen oder besser noch auf eisernen Unterstützungsplatten lagern, um den Druck auf eine größere Fläche der Mauer zu verteilen. Besonders gilt dies für kurze gleichmäßig belastete Träger.

Bei Anwendung von eisernen Trägern achte man auf die Auflager!

Aufgabe 37. Bei einem Dache mit Wellblecheindeckung sei die wagerechte Entfernung der Pfetten = 2,5 m; als gesamte Dachbelastung (Eigengewicht, Schnee und Wind) soll 180 kg für das Quadratmeter der Grundrißfläche angenommen werden. Welches Wellblech ist zu wählen?

Auflösung. Die Belastung des Wellbleches für 1 m Breite beträgt:

$$p\,l = 180 \,.\, 2{,}5 = 450 \text{ kg}$$

folglich ist das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = p\,l \,.\, \frac{l}{8} = 450 \,.\, \frac{250}{8} = 14063$$

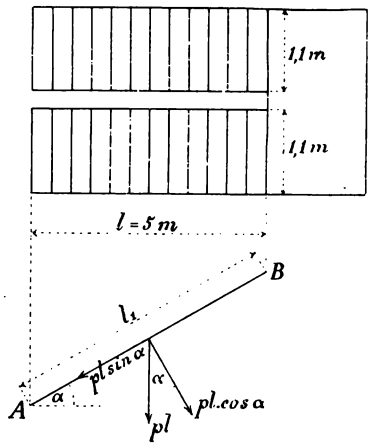
und das Widerstandsmoment (bei k = 500 kg):

$$W = \frac{14063}{500} = \sim 28$$

Wählt man die Wellenhöhe gleich der halben Wellenbreite, und die Dicke $\delta = 0{,}1$ cm, so genügt nach Tabelle 11 § 6 S. 36 eine Wellenhöhe von 8 cm, eine Wellenbreite von 16 cm.

Aufgabe 38. Für einen Treppenarm (Fig. 71), bei welchem als Belastung 450 kg für 1 qm der Grundrißfläche angenommen wird, soll die äußere Wange, bestehend aus einem [-Eisen, berechnet werden (k = 750).

Fig. 71.




Auflösung. Die Gesamtbelastung des Treppenarmes beträgt:

$$1{,}1 \,.\, 5 \,.\, 450 = 2475 \text{ kg}$$

Davon kommt auf die Wange die Hälfte:

$$p\,l = 1238 \text{ kg}$$

Durch Zerlegung von p l erhält man die rechtwinklig zum Träger A B wirkende Seitenkraft $p\,l \cos\alpha$, welche das größte Moment erzeugt:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\,l \cos\alpha \,.\, l_1}{8} = \frac{p\,l \cos\alpha}{8} \cdot \frac{l}{\cos\alpha}$$

$$\mathfrak{M}_{max} = p\,l \,.\, \frac{l}{8}$$

Hieraus geht hervor, daß die Neigung des Trägers auf die Größe des Momentes ganz ohne Einfluß ist, und daß die Wange von der Grundrißlänge l genau so zu berechnen ist, wie ein wagerechter, gleichmäßig belasteter Träger von der gleichen Länge l.

Das erforderliche Widerstandsmoment des Wangenträgers ist (bei $k = 750$) danach:

$$W = 1238 \frac{500}{8 \cdot 750} = 103$$

Nach Tabelle 1 S. 28 genügt ⊏-Eisen Nr. 16 mit $W = 116$.

Die in der Richtung A B wirkende Kraft $p\,l \sin\alpha$ kann bei der geringen Beanspruchung $k = 750$ für den Träger selbst vernachlässigt werden.

Aufgabe 39. Eine Deckenkonstruktion soll mit Hilfe von eisernen Trägern ausgeführt werden, die in solchen Entfernungen voneinander anzuordnen sind, daß bei voller Belastung die Durchbiegung derselben $\frac{l}{600}$ der Stützweite beträgt.

Stützweite $l = 520$ cm

Belastung = 700 kg für 1 qm

Die Höhe der Träger muß mit Rücksicht auf die Durchbiegung nach Gl. 57) S. 69 mindestens sein:

$$h = \frac{520}{25} = 20{,}8 \text{ cm}$$

Es sind daher I-Eisen Nr. 21 mit $W = 244$ zu verwenden. Der diesem Widerstandsmomente entsprechende Trägerabstand b ergibt sich aus der Bedingungsgleichung:

$$\mathfrak{M} = k\,W$$

Die Gesamtbelastung eines Trägers ist:

$$p\,l\,b = 700 \cdot 5{,}2 \cdot b = 3640\,b$$

Für $k = 1000$ wird dann:

$$3640\,b \frac{520}{8} = 1000 \cdot 244$$

folglich:

$$b = \frac{8 \cdot 1000 \cdot 244}{3640 \cdot 520} = 1{,}03 \text{ m}$$

Aufgabe 40. Es soll ein nach Fig. 65 S. 77 belasteter I-Träger berechnet werden unter Annahme folgender Größen:

$p = 10$ kg $\qquad l_1 = 120$ cm

$l = 600$ cm $\qquad l_2 = 300$ cm

Auflösung. Die Stützenwiderstände sind:

$$A = \frac{10 \cdot 120\,(600 - 60) + 10 \cdot 300 \cdot 150}{600} = 1830 \text{ kg}$$

$$B = \frac{10 \cdot 120 \cdot 60 + 10 \cdot 300\,(600 - 150)}{600} = 2370 \text{ kg}$$

Die Größe $x_o$, d. i. die Entfernung des gefährlichen Querschnitts vom Auflager B ergibt sich zu:

$$x_o = \frac{B}{p} = \frac{2370}{10} = 237 \text{ cm}$$

folglich wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{10 \cdot 237^2}{2} = 280845$$

$$W = \frac{280845}{1000} = 281$$

Nach Tabelle 2 § 6 ist erforderlich ein I-Eisen Nr. 23.

Aufgabe 41. Es soll die Profilnummer eines I-Eisens von 720 cm Länge bestimmt werden, welches gleichmäßig mit p = 8 kg für 1 cm Länge belastet ist. Dasselbe ist an seinem einen Endpunkte unterstützt und soll so weit über die zweite Stütze hinausragen, daß die Tragkraft voll ausgenutzt wird. (Vergl. Fig. 59 S. 72.)

Auflösung. Aus:

$$l + a = l + 0{,}4142 \cdot l = 720$$

folgt:

$$l = 509 \text{ cm}$$

$$a = 0{,}4142 \cdot 509 = 211 \text{ cm}$$

$$\mathfrak{M}_{max} = 0{,}0858 \cdot 8 \cdot 509^2 = 177833$$

$$W = \frac{177833}{1000} = 178$$

Es genügt ein I-Eisen Nr. 19.

Aufgabe 42. Ein nach Fig. 68 S. 79 belasteter Träger ist für folgende Angaben zu berechnen:

$P = 600$ kg $\quad l = 600$ cm

$p = 12$ kg $\quad l_1 = 400$ cm

$a = 500$ cm; $b = 100$ cm

Auflösung.

$$A = \frac{600 \cdot 100}{600} + 12 \cdot 400 \frac{(600 - 200)}{600} = 3300$$

$$x_o = \frac{3300}{12} = 275 \text{ cm}$$

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{12 \cdot 275^2}{2} = 453750$$

$$W = \frac{453750}{1000} = 454$$

Gewählt I-Eisen Nr. 27.

Aufgabe 43. Ein auf zwei Stützen ruhender Balken aus Eichenholz von 800 cm Länge soll gleichmäßig mit p = 5 kg für 1 cm Länge belastet und so unterstützt werden, daß die Tragkraft des Balkens voll ausgenutzt wird. Es soll der erforderliche Querschnitt des Balkens und die Lage der Stützen bestimmt werden (Fig. 57 S. 70).

Auflösung. Da nach S. 70:

$$a = \frac{l}{\sqrt{8}}$$

ist, so hat man:

$$800 = l + 2 \cdot \frac{l}{\sqrt{8}}$$

Danach:

$$l = \frac{800}{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{8}}\right)} = \sim 470 \text{ cm}$$

$$a = \frac{800 - 470}{2} = 165 \text{ cm}$$

Die Gesamtbelastung des Mittelteiles beträgt:

$$p\,l = 5 \cdot 470 = 2350 \text{ kg}$$

folglich:

$$\mathfrak{M} = p\,l \cdot \frac{l}{16} = 2350 \cdot \frac{470}{16} = 69031$$

und bei $k = 80$ kg:

$$W = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{69031}{80} = 863$$

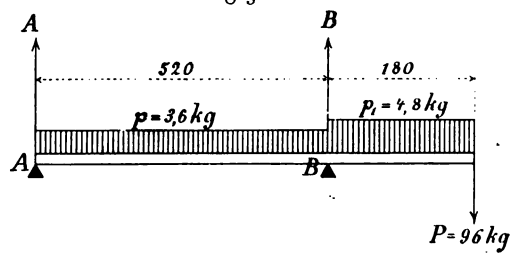
Wählt man $b = 14$ cm, so wird:

$$h = \sqrt{\frac{6}{14} \cdot 863} = 19{,}2 \text{ cm}$$

Aufgabe 44. Zur Unterstützung eines Balkons von 1,8 m Ausladung sollen die über die Gebäudemauer hinausragenden Fußbodenbalken aus Kiefernholz benutzt werden, welche 0,8 m auseinander liegen und 5,2 m Spannweite haben. Die Fußbodenbelastung beträgt 450 kg/qm, die Balkonbelastung 600 kg/qm; das Gewicht der Brüstung ist = 120 kg für das laufende Meter.

Wie stark sind die mittleren Balken auszuführen?

Fig. 72.




Auflösung. Die Belastung eines Balkens zwischen den Stützen beträgt für 1 cm Länge:

$$p = 0{,}8 \cdot 4{,}5 = 3{,}6 \text{ kg}$$

Die gleichförmig verteilte Belastung des überkragenden Balkenendes ist für 1 cm Länge:

$$p_1 = 0{,}8 \cdot 6 = 4{,}8 \text{ kg}$$

Auf das freie Balkenende wirkt außerdem die Einzelkraft:

$$P = 0{,}8 \cdot 120 = 96 \text{ kg}$$

In Fig. 72 sind diese Belastungen zusammengestellt.

Der Stützenwiderstand A ergibt sich aus:

$$A \cdot 520 - \frac{3{,}6 \cdot 520^2}{2} + \frac{4{,}8 \cdot 180^2}{2} + 96 \cdot 180 = 0$$

zu:

$$A = 753 \text{ kg}$$

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager A ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,x^2}{2} = 753 \cdot x - \frac{3{,}6 \cdot x^2}{2}$$

Dasselbe wird = Null für:

$$x_o = \frac{753}{1{,}8} = 418 \text{ cm}$$

folglich hat das Maximalmoment zwischen den Stützen die Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{3{,}6 \cdot 418^2}{8} = 78626$$

Das Moment über der Stütze B ist:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{4{,}8 \cdot 180^2}{2} + 96 \cdot 180 = 95040$$

Das Stützenmoment ist mithin das größte und der Balken zu berechnen nach:

$$k \cdot \frac{b\,h^2}{6} = 95040$$

Nimmt man $b : h = 5 : 7$, so wird für $k = 60$

$$60 \frac{^5/_7\, h \cdot h^2}{6} = 60 \cdot \frac{5}{42} h^3 = 95040$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 95040}{5 \cdot 60}} = 23{,}4 \text{ cm}$$

$$b = \frac{5}{7} h = \sim 17 \text{ cm}$$

Da für die übrigen nicht überkragenden Fußbodenbalken das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{3{,}6 \cdot 520^2}{8} = 121680$$

also größer als $\mathfrak{M}_1$ ist, so folgt, daß des Balkons wegen die Balken nicht verstärkt zu werden brauchen, sondern eher etwas schwächer gehalten werden könnten, was aus praktischen Rücksichten indessen wohl nicht geschehen würde.

Aufgabe 45. Welche Länge kann ein an den Enden unterstütztes I-Eisen Nr. 20 haben, um sich selbst noch mit Sicherheit tragen zu können?

Auflösung. Nach Tabelle 2 § 6 ist das Widerstandsmoment:

$$W = 214$$

und das Gewicht für 1 cm Länge:

$$g = 0{,}261 \text{ kg}$$

folglich das Gesamtgewicht:

$$G = 0{,}261 \cdot l$$

Die Trägerlänge ergibt sich dann aus der Gleichung:

$$l = \frac{8\,k\,W}{0{,}261 \cdot l}$$

$$0{,}261 \cdot l^2 = 8 \cdot 1000 \cdot 214$$

$$l = \sqrt{\frac{8 \cdot 1000 \cdot 214}{0{,}261}} = 2561 \text{ cm} = 25{,}61 \text{ m}$$

## § 10.

# Die statisch unbestimmten Träger.

Statisch unbestimmt nennt man solche Träger, bei denen es nicht möglich ist, die unbekannten Größen (d. s. die Momente und Stützenwiderstände) nur mit Hilfe der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (§ 4 S. 16) zu bestimmen. Zur Berechnung solcher Träger sind außer den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen noch die Elastizitätsgleichungen Gl. 31) bis 34) S. 43 und 44 zu benutzen.

Die einfachsten Fälle der statisch unbestimmten Träger sollen in folgendem kurz besprochen werden.

## 1. Der gleichmäßig belastete Träger auf drei Stützen.

Es soll vorausgesetzt werden, daß die Stützen alle in gleicher Höhe liegen und daß die Felder A C und B C die gleiche Spannweite $l$ haben (Fig. 73).

Da die Durchbiegung des Punktes A gegen den Punkt C = Null ist, so erhält man, wenn die gleichmäßige Belastung wieder mit p bezeichnet wird, mit Anwendung der Gl. 36) S. 46 und Gl. 40) S. 48:

$$0 = \frac{A\,l^3}{3\,E\,J} - \frac{p\,l^4}{8\,E\,J}$$

Da wegen des symmetrischen Belastungszustandes A = B sein muß, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\mathbf{A = B = \frac{3}{8}\,p\,l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 64)$$

Die Summe aller drei Stützenwiderstände muß gleich der Gesamtbelastung $= 2\,p\,l$ sein, danach wird:

$$\mathbf{C = \frac{10}{8}\,p\,l = \frac{5}{8}\,.\,2\,p\,l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 65)$$

Der Druck auf die Mittelstütze beträgt 5/8 der Gesamtbelastung.

Nachdem die Stützenwiderstände mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen gefunden sind, erfolgt die weitere Behandlung des Trägers in gewohnter Weise.

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$M_x = A\,x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{3}{8}\,p\,l\,.\,x - \frac{p\,x^2}{2}$$

Fügt man das Glied $^1/_8\,p\,l\,x$ positiv und negativ hinzu, so erhält man:

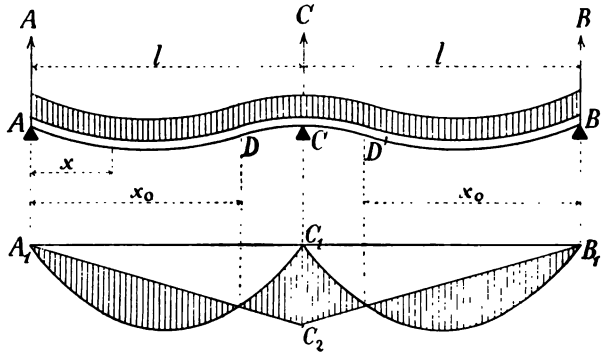
$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,l\,x}{2} - \frac{p\,x^2}{2} - \frac{p\,l\,x}{8} = \frac{p}{2}\,x\,(l - x) - {}^1/_8\,p\,l\,x$$

Das erste Glied der rechten Seite stimmt überein mit Gl. 52) S. 66, die graphische Darstellung desselben ist also eine Parabel mit der Pfeilhöhe $^1/_8\,p\,l^2$. Das zweite Glied ist proportional x, erreicht seinen größten Wert $^1/_8\,p\,l^2$ für $x = l$ und läßt sich darstellen durch die Gerade $A_1\,C_2$ bezw. $B_1\,C_2$ (Fig. 73), wenn $C_1\,C_2 = {}^1/_8\,p\,l^2$ aufgetragen wird.

Man erhält daher nach der letzten Gleichung graphisch die Momente $\mathfrak{M}$, wenn man von den Ordinaten der Parabel diejenigen der Geraden abzieht. Dadurch entsteht die in Fig. 73 schraffierte Momentenfläche.

Der Träger ist so durchgebogen, daß über der Mittelstütze die oberen Fasern, in den Feldern zwischen den Punkten A und D bezw. B und D' dagegen die unteren Fasern gezogen werden. In den Punkten D und D' geht die eine Krümmung in die andere über, folglich ist in diesen Punkten das Moment = Null.

Fig. 73.




Bezeichnet man den Abstand der Punkte D und D' von den Auflagern mit $x_0$, so ergibt sich, indem man $\mathfrak{M}_x = 0$ setzt:

$$x_0 = {}^3/_4\, l$$

Diese Trägerstücke A D und B D' können daher als an den Enden frei aufliegende Träger von der Länge $^3/_4\, l$ angesehen werden. Das größte Moment für diese Trägerstücke ist:

$$\mathfrak{M} = p \cdot {}^3/_4\, l \cdot \frac{{}^3/_4\, l}{8} = \frac{9}{128}\, p\, l^2$$

Das Moment über der Mittelstütze erhält man, wenn man in dem Ausdruck $\mathfrak{M}_x$ für x den Wert l einsetzt.

Man findet:

$$\mathfrak{M}_c = -\frac{p\, l^2}{8}$$

Der absolute Wert von $\mathfrak{M}_c$ ist größer als $\mathfrak{M}$, der gefährliche Querschnitt findet also über der Stütze C statt, und der Träger ist zu berechnen nach der Gleichung:

$$\frac{p\, l^2}{8} = k\, W \quad \ldots\ldots\ldots\ 66)$$

Diese Gleichung stimmt überein mit der Gleichung 54) S. 68.

Danach ist das Moment über der Mittelstütze des symmetrischen gleichmäßig belasteten Trägers von der Länge 2 l auf drei in gleicher Höhe liegenden Stützen gleich dem größten Momente des gleichmäßig belasteten, an beiden Enden frei aufliegenden Trägers von der Länge l.

Für die Berechnung des Trägerquerschnittes kann man daher annehmen, daß die Felder A C und B C durch je einen besonderen Träger überspannt sind.

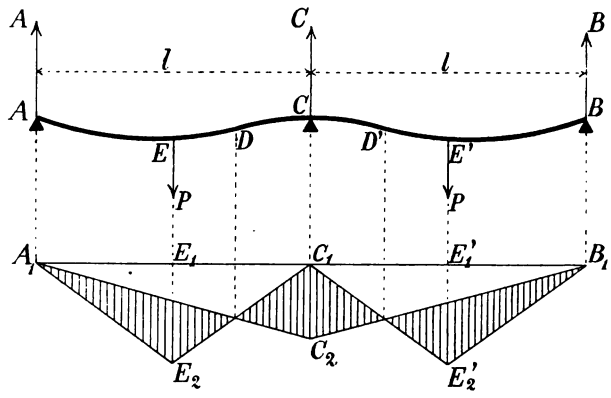
Zur Berechnung der Stütze C selbst, die z. B. aus einer Säule oder einem Unterzug bestehen kann, ist diese Annahme dagegen unzulässig, denn der Druck, welchen zwei Einzelträger A C und B C auf die Stütze C übertragen, würde nur $= p\,l$ sein, während in Wirklichkeit der durchlaufende Träger A C B nach Gl. 65) einen größeren Druck auf die Mittelstütze ausübt.

Durch eine Aenderung in der Höhenlage der Stützen werden die Momente stark beeinflußt, und zwar wird durch eine Senkung der Mittelstütze das Moment $M_c$ verkleinert, die Momente M vergrößert. Durch eine geringe Senkung der Mittelstütze läßt sich daher die Tragfähigkeit des Balkens vergrößern, wogegen eine Ueberhöhung der Mittelstütze nachteilig auf die Tragfähigkeit einwirkt. Da durch Zufälligkeiten, z. B. nachträgliches ungleichförmiges Setzen der Auflager, die Höhenlage derselben sich gegeneinander leicht etwas verändern kann und eine genaue Ueberwachung häufig schwer durchzuführen ist, so bleibt hauptsächlich aus diesem Grunde die Anwendung der Träger auf mehreren Stützen mit Recht beschränkt, obgleich bei diesen an Material etwas gespart werden kann.

## 2. Der durch Einzelkräfte belastete Träger auf drei Stützen.

Es wird auch hier wieder vorausgesetzt, daß die Stützen in gleicher Höhe liegen, und daß die Feldweiten A C und B C (Fig. 74) einander gleich sind. Die Einzelkräfte P sollen in den Feldmitten angreifen.

Fig. 74.




Die Durchbiegung des Punktes A gegen den Punkt C ist im ganzen = Null. Sie setzt sich zusammen aus einem Teile, hervorgebracht durch den Stützenwiderstand A und aus einem andern Teile in entgegengesetzter Richtung, welcher durch die Einzelkraft P erzeugt wird.

Der Angriffspunkt E der Einzelkraft P erfährt nach Gl. 36) S. 46 durch P allein die Durchbiegung:

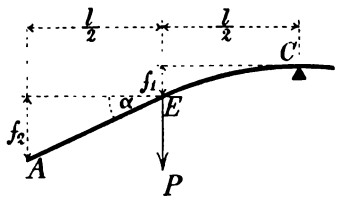
$$f_1 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} = \frac{Pl^3}{24EJ}$$

Der Punkt A liegt aber (Fig. 75) um das Maß:

$$f_2 = \frac{l}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

tiefer als der Punkt E, und da nach Gl. 38) S. 46:

Fig. 75.




$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ}$$

ist, so entsteht:

$$f_2 = \frac{l}{2} \cdot \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ} = \frac{Pl^3}{16EJ}$$

Die Gesamtdurchbiegung des Punktes A, hervorgebracht durch die Kraft P beträgt danach:

$$f_1 + f_2 = \frac{Pl^3}{24EJ} + \frac{Pl^3}{16EJ} = \frac{5}{48}\,\frac{Pl^3}{EJ}$$

Diese wird gerade wieder aufgehoben durch die von dem Stützenwiderstande A allein bewirkte Durchbiegung nach oben, welche nach Gl. 36) S. 46 die Größe hat:

$$f = \frac{Al^3}{3EJ}$$

Setzt man $f = f_1 + f_2$, so erhält man:

$$A = B = \frac{5}{16}P$$

$$C = \frac{22}{16}P$$

Das Moment im Angriffspunkte von P ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{5}{16}P \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{32}Pl$$

Das Moment über der Mittelstütze hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{5}{16}P \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = -\frac{3}{16}Pl$$

Der Träger ist daher zu berechnen nach:

$$\frac{3}{16}Pl = kW \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 67)$$

Für die Strecke von A bis E (Fig. 74) iſt:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x = \frac{5}{16}\,P\,x$$

oder:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{P}{2}\,x - \frac{3}{16}\,P\,x$$

Für $x = 0$ wird:

$$\mathfrak{M} = 0$$

für $x = \frac{l}{2}$ wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,l}{4} - \frac{3}{32}\,P\,l$$

Für die Strecke von E bis C (Fig. 74) iſt:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - P\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

oder:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{P}{2}\,(l - x) - \frac{3}{16}\,P\,x$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird (wie oben):

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,l}{4} - \frac{3}{32}\,P\,l$$

Für $x = l$ wird:

$$\mathfrak{M}_c = -\frac{3}{16}\,P\,l$$

hieraus ergibt ſich die in Fig. 74 angedeutete graphiſche Darſtellung der Momente. Darin iſt:

$$E_1 E_2 = E'_1 E'_2 = \frac{P\,l}{4}$$

und:

$$C_1 C_2 = \frac{3}{16}\,P\,l$$

Die Lage der Punkte D und D′ iſt analytiſch beſtimmt durch die Bedingung:

$$\frac{P}{2}\,(l - x_0) - \frac{3}{16}\,P\,x_0 = 0$$

Man erhält:

$$x_0 = \frac{8}{11}\,l$$

## 3. Der an einem Ende wagerecht eingeſpannte, am anderen Ende frei aufliegende Träger.

a) Der Träger iſt gleichmäßig auf ſeine ganze Länge belaſtet.

Liegt (Fig. 76) der Auflagerpunkt A mit der Einſpannungsſtelle C in gleicher Höhe, ſo iſt dieſer Träger anzuſehen als die Hälfte des unter 1) beſprochenen, gleichmäßig belaſteten Trägers auf drei Stützen, welcher in der Mitte feſt eingemauert gedacht iſt.

Die Stützenwiderſtände ſind:

$$A = \frac{3}{8}\,p\,l \qquad C = \frac{5}{8}\,p\,l$$

Das größte Moment findet bei C ſtatt und hat den Wert:

$$\mathfrak{M}_c = -\frac{p\,l^2}{8}$$

die Berechnung des Trägers geſchieht nach Gl. 66) S. 90.

Fig. 76.

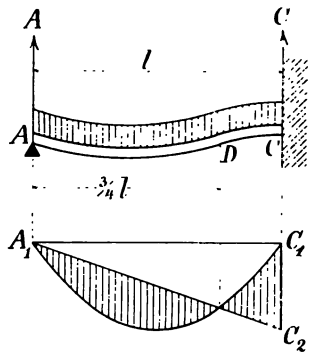
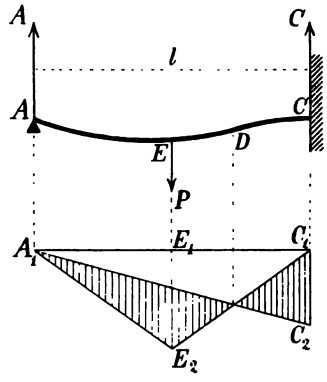



Fig. 77.




Die graphiſche Darſtellung der in Fig. 76 ſchraffierten Momentfläche gibt ein deutliches Bild von der Veränderlichkeit des Momentes.

b) Der Träger iſt in der Mitte durch die Einzelkraft P belaſtet.

Die Punkte A und C ſollen auch hier wieder in gleicher Höhe liegen, ſo daß der Träger (Fig. 77) als die Hälfte des in Fig. 74 abgebildeten Trägers auf drei Stützen zu betrachten iſt.

Die Stützenwiderſtände ſind:

$$A = \frac{5}{16}\,P \qquad C = \frac{11}{16}\,P$$

Das größte Moment bei C hat den Wert:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{3}{16}\,P\,l$$

Die Berechnung des Trägers geſchieht nach Gl. 67) S. 92. In der graphiſchen Darſtellung der Momente iſt:

$$E_1 E_2 = \frac{P\,l}{4} \quad \text{und} \quad C_1 C_2 = \frac{3}{16}\,P\,l$$

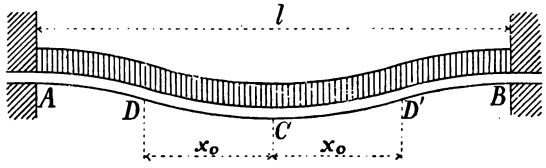
## 4. Der an beiden Enden wagerecht eingespannte, gleichmäßig belastete Träger.

Die Form der elastischen Linie bei diesem Träger (Fig. 78) zeigt, daß zwei Punkte D und D' vorhanden sind, in denen das Moment = Null ist.

Die vorläufig noch unbekannte Entfernung dieser Punkte von der Mitte des Trägers sei $x_0$.

Das mittlere Trägerstück von der Länge $2x_0$ kann angesehen werden als ein an den Enden frei aufliegender Träger, welcher auf jeden Unterstützungspunkt

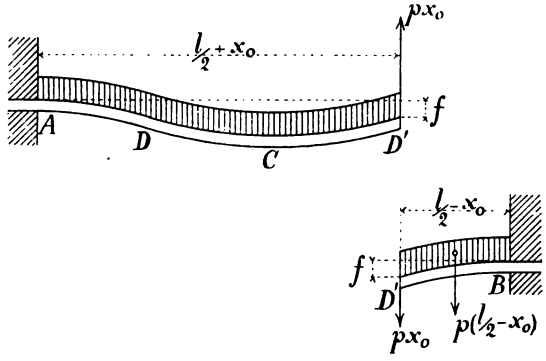
Fig. 78.




den Auflagerdruck $p\,x_0$ überträgt. Die Seitenstücke A D und B D' bilden daher gleichmäßig belastete Konsolträger, an deren freiem Ende die Einzelkraft $p\,x_0$ wirkt.

Der Gleichgewichtszustand wird nicht gestört, wenn man sich den Träger A B im Punkte D' zerschnitten denkt und dafür für das linke Trägerstück A D' die lotrecht aufwärts gerichtete Kraft $p\,x_0$, für das rechte Trägerstück die lotrecht

Fig. 79.




abwärts gerichtete Kraft $p\,x_0$ als äußere Kraft hinzufügt (Fig. 79). Bezeichnet man die Durchbiegung des Punktes D' gegen die Punkte A und B mit f, so ergibt sich nach Gl. 36) S. 46 und Gl. 40) S. 48 für das linke Trägerstück:

$$f = \frac{p\left(\frac{l}{2}+x_0\right)^4}{8EJ} - \frac{p\,x_0\left(\frac{l}{2}+x_0\right)^3}{3EJ}$$

und für das rechte Trägerstück:

$$f = \frac{p\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^4}{8EJ} + \frac{p x_0 \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3}{3EJ}$$

Setzt man diese beiden Werte von f einander gleich, so folgt:

$$3\left[\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^4 - \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^4\right] = 8 x_0 \left[\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3 + \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3\right]$$

Durch Auflösung dieser Gleichung ergibt sich:

$$x_0 = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

Danach ist die Länge des Mittelstückes DD'

$$2x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

und das größte Moment bei C:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p\frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}}}{8} = \frac{p l^2}{24}$$

Für das Moment bei B ergibt sich:

$$\mathfrak{M} = p x_0 \left(\frac{l}{2} - x_0\right) + \frac{p\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^2}{2}$$

und wenn für $x_0$ der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M} = p\frac{l}{2\sqrt{3}}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{p\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2\sqrt{3}}\right)^2}{2}$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{M} = \frac{p l^2}{12}$$

Die Einspannungsstellen A und B sind also die gefährlichen Querschnitte und der Träger ist zu berechnen nach der Gleichung:

$$\frac{p l^2}{12} = k W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 68)$$

## 5. Der an beiden Enden wagerecht eingespannte, in der Mitte durch eine Einzelkraft P belastete Träger.

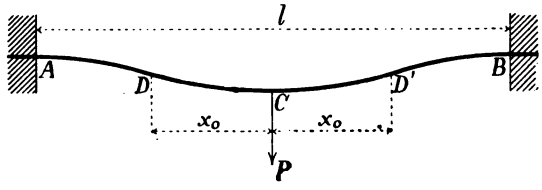
Die Entfernung $x_0$ der Punkte D und D', in denen das Moment = Null ist, von der Mitte des Trägers erhält man in ähnlicher Weise wie unter 4).

Das mittlere Trägerstück DD' von der Länge $2x_0$ kann betrachtet werden als ein an den Enden frei aufliegender Träger, welcher auf jeden Unterstützungs-

punkt den Auflagerdruck $^1/_2$ P überträgt. Die Seitenstücke A D und B D′ bilden daher Konsolträger, an deren freiem Ende die Kraft $^1/_2$ P wirkt.

Denkt man sich den Träger A B (Fig. 80) im Punkte D′ zerschnitten, so hat man für das linke Trägerstück A D′ die lotrecht aufwärts gerichtete Kraft $^1/_2$ P,

Fig. 80.

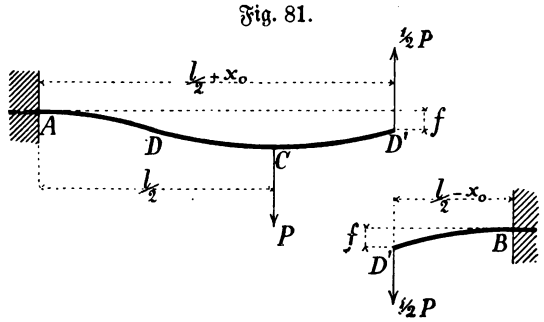



für das rechte Trägerstück B D′, die lotrecht abwärts gerichtete Kraft $^1/_2$ P als äußere Kraft hinzuzufügen (Fig. 81).

Die Durchbiegung f des Punktes D′ gegen die Punkte A und B ergibt sich dann für das rechte Trägerstück B D′ nach Gl. 36) S. 46 zu:

$$f = \frac{^1/_2\, P \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3}{3\,E\,J}$$

Fig. 81.




Für das linke Trägerstück A D′ setzt sich die Durchbiegung f aus mehreren Teilen zusammen.

Die in C angreifende Kraft P (Fig. 82) erzeugt im Punkte C die Durchbiegung:

$$f_1 = \frac{P \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3\,E\,J}$$

Die Tangente des Winkels, den die Trägerachse in C mit der Wagerechten bildet, hat nach Gl. 38) S. 46 die Größe:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\,E\,J}$$

folglich liegt der Punkt D' um:

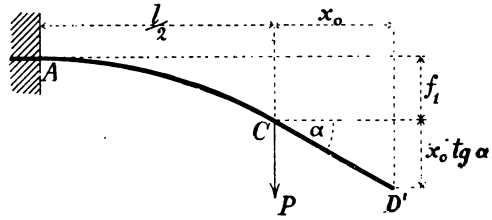
$$x_0 \operatorname{tg} \alpha = x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ}$$

tiefer als der Punkt C.

Die von der Kraft P allein bewirkte Durchbiegung des Punktes D' gegen den Punkt A beträgt danach:

$$f_1 + x_0 \operatorname{tg} \alpha = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} + x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ}$$

Fig. 82.




Die in D' angreifende Kraft $\frac{1}{2}$ P erzeugt nun aber eine Durchbiegung nach aufwärts von der Größe:

$$f_2 = -\frac{\frac{1}{2} P\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3}{3EJ}$$

Die gesamte Durchbiegung des Punktes D' ist daher:

$$f = f_1 + x_0 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} + x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ} - \frac{\frac{1}{2} P\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^2}{3EJ}$$

Setzt man die beiden Werte von f, die sich bei Betrachtung des rechten und linken Trägerstückes ergeben haben, einander gleich, so folgt:

$$\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3 + \left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3 = 2\left(\frac{l}{2}\right)^3 + 3 x_0 \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

woraus man durch Auflösung der Gleichung für $x_0$ erhält:

$$x_0 = \frac{l}{4}$$

Das mittlere Trägerstück DD' hat daher die Länge

$$2 x_0 = \frac{l}{2}$$

und das Moment bei C ist:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)}{4} = \frac{Pl}{8}$$

Die Konsolträger A D und B D′ haben die Länge $\frac{l}{4}$ und sind am freien Ende durch die Kraft $\frac{P}{2}$ belastet. Die Momente bei A und B haben danach die Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{P\,l}{8}$$

Die drei größten Momente bei A, B und C sind also einander gleich und das erforderliche Widerstandsmoment des Trägers ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{P\,l}{8} = k\,W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 69)$$

In Bezug auf die eingespannten Träger verdient schließlich noch bemerkt zu werden, daß in der Praxis auf eine vollkommene Einspannung nicht leicht zu rechnen ist, und daß man sicherer geht, keine Rücksicht darauf zu nehmen und den Träger immer als Träger auf zwei Stützen anzusehen und zu berechnen.

## § 11.

## Die Träger von gleichem Biegungswiderstand.

In der Gleichung:

$$\mathfrak{M} = k\,W$$

darf k höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme werden.

Bei den bisher betrachteten prismatischen Trägern, bei denen W für alle Querschnitte denselben Wert hat, wird diese zulässige Inanspruchnahme nur in den Punkten erreicht, in denen das Moment der äußeren Kräfte ein Maximum ist. Alle anderen Stellen des Trägers erleiden eine geringere Inanspruchnahme. Das Material wird bei den prismatischen Trägern daher nur *in den gefährlichen Querschnitten* voll ausgenutzt.

Soll die Tragfähigkeit des Materials *in allen Querschnitten* voll ausgenutzt werden, so darf der Träger nur *in den* Teilen eine prismatische Form haben, in denen das Moment unveränderlich ist, wie z. B. bei dem Träger Fig. 37 S. 47 zwischen den Punkten A und C, in Fig. 51 S. 61 zwischen C und C′ und in Fig. 52 S. 62 zwischen A und B. In allen übrigen Teilen muß sich der Querschnitt mit dem Momente ändern, und zwar muß der Träger eine solche Form erhalten, daß die Spannung der äußeren Faserschicht in allen Querschnitten gleich der zulässigen Inanspruchnahme wird.

Träger, welche dieser Bedingung entsprechen, nennt man *Träger von gleichem Biegungswiderstand*. Diese Träger besitzen außer dem Vorteil der Materialersparung vor den prismatischen Trägern auch noch den Vorteil, daß die Belastung durch das Eigengewicht geringer ausfällt.

5157818

Nach der obigen Erklärung muß bei einem Träger von gleichem Biegungswiderstand der Quotient:

$$\frac{\mathfrak{M}}{W} = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Widerstandsmoment}}$$

für alle Querschnitte denselben unveränderlichen Wert haben. Bezeichnet man mit $\mathfrak{M}_x$ und $W_x$ die Werte, welche die Größen $\mathfrak{M}$ und W für einen bestimmten Querschnitt des Trägers an einer Stelle in der Entfernung x vom Trägerende annehmen, so lautet die allgemeine Bedingungsgleichung für einen Träger von gleichem Biegungswiderstand:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{W_x} = \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} = \frac{W_x}{W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 70)$$

Die Kraftmomente verhalten sich wie die Widerstandsmomente.

Sind für den kreisförmigen Querschnitt y und d die Durchmesser, welche den Widerstandsmomenten $W_x$ und W entsprechen, ist also:

$$W_x = \frac{y^3 \pi}{32} \qquad W = \frac{d^3 \pi}{32}$$

so erhält man aus Gl. 70):

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} = \frac{y^3}{d^3}$$

oder:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 71)$$

Die Durchmesser verhalten sich wie die dritten Wurzeln aus den Momenten.

Bei einem an einem Ende fest eingespannten, am anderen Ende durch die Kraft P belasteten Träger (Fig. 83) kann man setzen:

$$\mathfrak{M}_x = P\,x \qquad \mathfrak{M} = P\,l$$

folglich wird:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 72)$$

Nach Gl. 72) kann der Durchmesser y für jede beliebige Stelle x des Trägers bestimmt werden, nachdem der Durchmesser d aus der Gleichung:

$$k\,\frac{d^3 \pi}{32} = P\,l$$

berechnet ist.

Für einen Freiträger mit rechteckigem Querschnitt und der unveränderlichen Höhe h ist nach Fig. 84 für eine Stelle in der Entfernung x vom Angriffspunkte der Kraft P:

$$\mathfrak{M}_x = P\,x \qquad W_x = \frac{y\,h^2}{6}$$

Fig. 83.

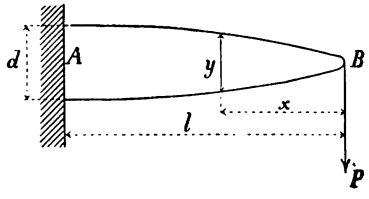
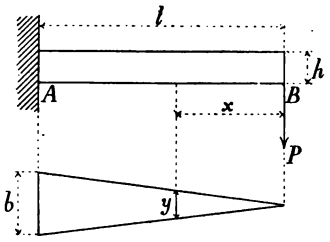



Fig. 84.




und für die Einspannungsstelle:

$$\mathfrak{M} = P\,l \qquad W = \frac{b\,h^2}{6}$$

folglich nach Gl. 70):

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 73)$$

Der Grundriß des Trägers bildet daher ein Dreieck.

Die Breite b an der Einspannungsstelle ergibt sich aus der Gleichung:

$$k\,\frac{b\,h^2}{6} = P\,l$$

Wird der Krümmungshalbmesser dieses Trägers an der Einspannungsstelle mit $\varrho$, an der Stelle x mit $\varrho_x$ bezeichnet, so ist nach Gl. 29) S. 42:

$$\varrho = \frac{E\,J}{\mathfrak{M}} = \frac{E\,b\,h^3}{12\,P\,l}$$

$$\varrho_x = \frac{E\,J_x}{\mathfrak{M}_x} = \frac{E\,y\,h^3}{12\,P\,x}$$

folglich:

$$\frac{\varrho}{\varrho_x} = \frac{b}{y} \cdot \frac{x}{l}$$

Nach Gl. 73) ist aber die rechte Seite dieser Gleichung = 1, woraus folgt:

$$\varrho = \varrho_x$$

d. h. der Krümmungshalbmesser hat für alle Stellen des Trägers dieselbe Größe, der Träger ist also nach einer Kreislinie gekrümmt.

Ist r der Halbmesser dieser Kreislinie, so läßt sich die Durchbiegung f des Endpunktes B aus Fig. 85 folgendermaßen berechnen.

Es ist:

$$l^2 = r^2 - (r - f)^2$$
$$l^2 = 2rf - f^2$$

Wegen Kleinheit von f kann man das Glied $f^2$ vernachlässigen und erhält dann aus letzter Gleichung:

$$\mathbf{f = \frac{l^2}{2r}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 74)$$

Fig. 85.

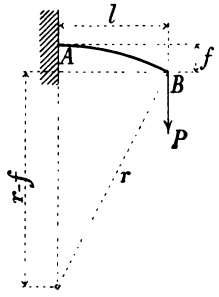
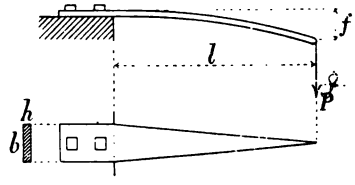



Fig. 86.




Nach Gl. 28) S. 42 ist aber:

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{Ee}$$

Setzt man diesen Wert in Gl. 74), so ergibt sich:

$$\mathbf{f = \frac{1}{2}\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{e}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 75)$$

Die Durchbiegung ist hier also 1,5 mal so groß als unter sonst gleichen Umständen bei einem prismatischen Träger (vergl. Gl. 37) S. 46).

Führt man die ganze Trägerhöhe h ein, setzt also:

$$2e = h$$

und löst Gl. 75) für h auf, so erhält man:

$$\mathbf{h = \frac{k}{E}\,\frac{l^2}{f}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 76)$$

Nach dieser Gleichung kann z. B. die Stärke einer Dreiecksfeder berechnet werden, welche durch eine am Ende wirkende Kraft P die Durchbiegung f erfährt (Fig. 86).

Die erforderliche Breite b an der Befestigungsstelle ergibt sich dann aus der Gleichung:

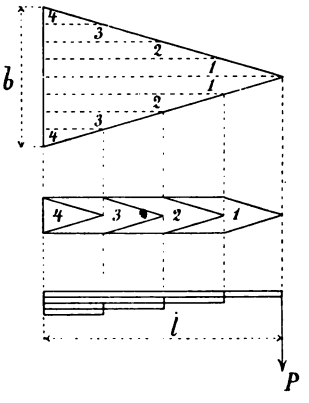
$$k \cdot \frac{b\,h^2}{6} = P\,l$$

zu:

$$\mathbf{b = \frac{6\,P\,l}{k\,h^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 77)$$

Fällt hiernach die Breite b größer aus als wünschenswert ist, so kann man die Feder, wie in Fig. 87 angedeutet ist, in einzelne Streifen von gleicher Breite zerlegen. Indem man sich dann je zwei mit gleichen Nummern versehene Streifen zu einem Stück wieder zusammengesetzt denkt, entsteht durch Uebereinanderlegen der einzelnen Stücke die sogen. Schichtfeder.

Fig. 87.




Aufgabe 46. Es sollen die Abmessungen h und b einer stählernen Feder von 50 cm Länge, welche sich unter Einwirkung einer Kraft $P = 256$ kg um 6 cm durchbiegt, berechnet werden. Die zulässige Inanspruchnahme für gehärteten Stahl sei dabei $k = 4000$ kg und der Elastizitätsmodul $E = 2000000$.

Auflösung. Nach Gl. 76) ist:

$$h = \frac{4000}{2000000} \cdot \frac{50^2}{6} = 0{,}8 \text{ cm}$$

Die Breite an der Einspannungsstelle ergibt sich aus Gl. 77) zu:

$$b = \frac{6 \cdot 256 \cdot 50}{4000 \cdot 0{,}8^2} = 30 \text{ cm}$$

Statt der einfachen Dreieckfeder kann hier eine Schichtfeder ausgeführt werden, welche z. B. aus:

4 Blättern von je $7\frac{1}{2}$ cm Breite
oder 3 Blättern von je 10 cm Breite

bestehen kann.

Aufgabe 47. Die in Fig. 88 skizzierte aus Gußeisen vorausgesetzte ungleichschenklige Achse sei belastet mit $Q = 16000$ kg. Die Schenkellängen (bis zu den Mitten der Zapfen gemessen) seien: $L_1 = 36$ cm; $L_2 = 60$ cm. Es sollen die Zapfendurchmesser $d_1$ und $d_2$ und der Durchmesser D der Achse an der Laststelle berechnet werden. Das Verhältnis von Zapfenlänge zu Zapfendurchmesser ist dabei zu 1,4 anzunehmen.

Auflösung.
Die Zapfendrücke werden nach Gl. 45) und 46) S. 58:

$$P_1 = \frac{Q \cdot L_2}{L_1 + L_2} = \frac{16000 \cdot 60}{36 + 60} = 10000 \text{ kg}$$

$$P_2 = \frac{Q \cdot L_1}{L_1 + L_2} = \frac{16000 \cdot 36}{36 + 60} = 6000 \text{ kg}$$

Der Zapfendurchmesser $d_1$ ergibt sich aus:

$$P_1 \cdot \frac{l_1}{2} = k \frac{d_1^3 \pi}{32} = \sim 0{,}1 \cdot k\, d_1^3$$

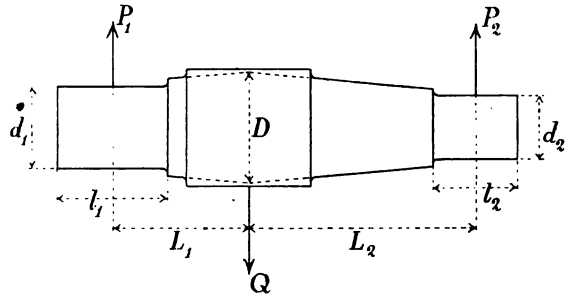
Wenn hierin $l_1 = 1{,}4\, d_1$ eingesetzt und die Gleichung für $d_1$ aufgelöst wird, erhält man:

$$d_1 = \sqrt{\frac{7}{k} P_1}$$

Ebenso wird:

$$d_2 = \sqrt{\frac{7}{k} P_2}$$

Fig. 88.




Für die zulässige Inanspruchnahme k, die beständig zwischen einem größten positiven und einem größten negativen Werte wechselt, ist die Tabelle III S. 5 (Biegung) maßgebend. Danach ist für Gußeisen k = 150 kg/qcm zu setzen, so daß man erhält:

$$d_1 = \sqrt{\frac{7 \cdot P_1}{150}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 10000}{150}} = 21{,}6 \text{ cm}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{7 \cdot P_2}{150}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 6000}{150}} = 16{,}7 \text{ cm}$$

Die Zapfenlängen werden:

$$l_1 = 1{,}4 \cdot 21{,}6 = \sim 30 \text{ cm}$$
$$l_2 = 1{,}4 \cdot 16{,}7 = \sim 23 \text{ cm}$$

Der Durchmesser D ergibt sich nach Gl. 71) S. 100 aus:

$$\frac{D}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{P_1 L_1}{P_1 \cdot {}^1/_2\, l_1}} = \sqrt[3]{\frac{2 L_1}{l_1}}$$

zu:

$$D = d_1 \sqrt[3]{\frac{2 L_1}{l_1}} = 21{,}6 \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 36}{30}} = \sim 29 \text{ cm}$$

Ebenso nach derselben Gleichung aus:

$$\frac{D}{d_2} = \sqrt[3]{\frac{P_2 L_2}{P_2 \cdot {}^1/_2\, l_2}} = \sqrt[3]{\frac{2 L_2}{l_2}}$$

zu:

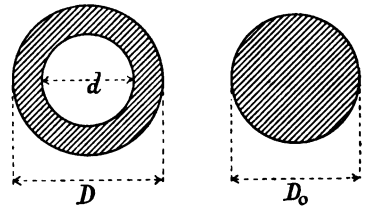
$$D = d_2 \sqrt[3]{\frac{2 L_2}{l_2}} = 16{,}7 \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 60}{23}} = \sim 29 \text{ cm}$$

Wenn die Achse als Hohlguß mit ringförmigem Querschnitt ausgeführt wird, so muß dieser dasselbe Widerstandsmoment besitzen als der volle Querschnitt der massiven Achse an derselben Stelle.

Wird für den vollen Querschnitt der Durchmesser mit $D_0$ und werden für den Ringquerschnitt an derselben Stelle die Durchmesser außen und innen mit D und d bezeichnet (Fig. 89), so muß sein:

$$\frac{D_0^3\,\pi}{32} = \frac{(D^4 - d^4)\,\pi}{32\,D}$$

Fig. 89.




oder:

$$D_0^3 = \frac{D^4 - d^4}{D} = D^3\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

daraus:

$$\frac{D}{D_0} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} \quad . \quad 78)$$

Gewöhnlich wird für das Verhältnis d : D ein bestimmter Wert angenommen und für diesen nach der letzten Gleichung D berechnet. Man erhält folgende Tabelle:

| für $\frac{d}{D}$ = | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,65 | 0,7 | 0,75 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| wird $\frac{D}{D_0}$ = | 1,01 | 1,03 | 1,05 | 1,07 | 1,1 | 1,14 | 1,2 |

Nimmt man z. B. bei der obigen Aufgabe für die (hohlen) Zapfen das Verhältnis der Durchmesser = 0,6 an, so werden nach der letzten Tabelle die äußeren Zapfendurchmesser:

$$d_1' = 1{,}05\,.\,d_1 = 1{,}05\,.\,21{,}6 = 22{,}7 \text{ cm}$$
$$d_2' = 1{,}05\,.\,d_2 = 1{,}05\,.\,16{,}7 = 17{,}5 \text{ cm}$$

Die inneren Zapfendurchmesser:

$$d_1'' = 0{,}6\,.\,d_1' = 0{,}6\,.\,22{,}7 = 13{,}6 \text{ cm}$$
$$d_2'' = 0{,}6\,.\,d_2' = 0{,}6\,.\,17{,}5 = 10{,}5 \text{ cm}$$

folglich die Wandstärken:

$$\delta_1 = \frac{d_1' - d_1''}{2} = \frac{22{,}7 - 13{,}6}{2} = \sim 4{,}6 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = \frac{d_2' - d_2''}{2} = \frac{17{,}5 - 10{,}5}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$$

Nimmt man ferner für die (hohle) Achse an der Laststelle das Verhältnis der Durchmesser = 0,7 an, so wird nach der Tabelle der äußere Durchmesser:

$$D' = 1{,}1\,.\,D = 1{,}1\,.\,29 = 32 \text{ cm}$$

folglich der innere Durchmesser:

$$D'' = 0{,}7\,.\,D' = 0{,}7\,.\,32 = 22{,}4 \text{ cm}$$

und die Wandstärke:

$$\delta = \frac{D' - D''}{2} = \frac{32 - 22{,}4}{2} = 4{,}8 \text{ cm}$$

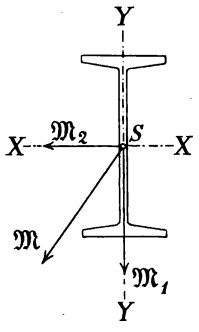
## § 12.

# Die auf Doppelbiegung beanspruchten Träger.

Bisher wurde bei den belasteten Trägern stets vorausgesetzt, daß die Kraftebene, also auch die Momentenebene mit einer Hauptachse des Trägerquerschnittes übereinstimmt. Es kommen nun aber im Hochbau häufig Träger vor, bei denen diese Voraussetzung nicht zutrifft, bei denen vielmehr die Momentenebene eine beliebige, von der Hauptachse des Querschnittes abweichende Richtung hat. Die Träger erfahren in diesem Falle eine Doppelbiegung.

Zerlegt man nämlich (Fig. 90) das Moment $\mathfrak{M}$ nach der Richtung der Hauptachsen Y Y und X X in die Seitenmomente $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, so wird durch $\mathfrak{M}_1$ eine Biegung des Trägers in der Y-Ebene und gleichzeitig durch $\mathfrak{M}_2$ eine Biegung in der X-Ebene hervorgerufen.

Fig. 90.




Das Moment $\mathfrak{M}_1$ für sich erzeugt die Randspannung:

$$k_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{W_x}$$

Das Moment $\mathfrak{M}_2$ für sich die Randspannung:

$$k_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{W_y}$$

Durch gleichzeitige Wirkung von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ entsteht als größte überhaupt auftretende Spannung:

$$k = k_1 + k_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{W_x} + \frac{\mathfrak{M}_2}{W_y}$$

k darf dabei nicht größer als die zulässige Inanspruchnahme werden.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$k = \frac{1}{W_x}\left(\mathfrak{M}_1 + \frac{W_x}{W_y}\,\mathfrak{M}_2\right)$$

oder wenn man das Verhältnis $W_x : W_y$ kurz mit c bezeichnet:

$$W_x = \frac{\mathfrak{M}_1 + c\,\mathfrak{M}_2}{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 79)$$

Man setze nach Prof. R. Land*) für ein schätzungsweise passendes Profil aus den Profiltabellen die zugehörige Verhältniszahl c ein, bestimme nach Gl. 79) den Wert $W_x$ und setze die zum nächstpassenden Profil gehörige Verhältniszahl c von neuem in Gl. 79), um den genaueren, mindestens erforderlichen Wert $W_x$ zu erhalten. Mittelwerte für die erste Schätzung sind:

$c = 8$ für I-Profile
$c = 6$ für ⊏-Profile

*) Siehe Zeitschr. d. V. d. J. 1895 S. 293.

Die genauen Werte von $c = W_x : W_y$ für die I-, [- und Z-Profile sind in folgenden Tabellen aufgeführt:

1. I-Eisen.

| Nr. | c = | Nr. | c = | Nr. | c = |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 6,50 | 19 | 8,20 | 30 | 9,07 |
| 9 | 6,80 | 20 | 8,26 | 32 | 9,23 |
| 10 | 7,01 | 21 | 8,31 | 34 | 9,40 |
| 11 | 7,23 | 22 | 8,34 | 36 | 9,53 |
| 12 | 7,38 | 23 | 8,50 | 38 | 9,67 |
| 13 | 7,57 | 24 | 8,50 | 40 | 9,76 |
| 14 | 7,65 | 25 | 8,54 | 42½ | 9,89 |
| 15 | 7,83 | 26 | 8,72 | 45 | 10,1 |
| 16 | 7,92 | 27 | 8,76 | 47½ | 10,1 |
| 17 | 8,02 | 28 | 8,91 | 50 | 10,3 |
| 18 | 8,10 | 29 | 8,99 | 55 | 10,3 |

2. [-Eisen.

| Nr. | c = | Nr. | c = | Nr. | c = |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1,59 | 12 | 5,48 | 22 | 7,28 |
| 4 | 2,31 | 14 | 5,85 | 24 | 7,57 |
| 5 | 2,82 | 16 | 6,32 | 26 | 7,76 |
| 6½ | 3,50 | 18 | 6,73 | 28 | 7,88 |
| 8 | 4,16 | 20 | 7,09 | 30 | 7,90 |
| 10 | 4,84 | | | | |

3. Z-Eisen.

| Nr. | c = | Nr. | c = | Nr. | c = |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1,05 | 8 | 2,7 | 16 | 4,3 |
| 4 | 1,45 | 10 | 3,2 | 18 | 4,6 |
| 5 | 1,76 | 12 | 3,6 | 20 | 4,8 |
| 6 | 2,10 | 14 | 4,0 | | |

Für den rechteckigen Querschnitt*) mit der Breite b und der Höhe h ist:

$$c = \frac{W_x}{W_y} = \frac{\frac{1}{6} b h^2}{\frac{1}{6} h b^2} = \frac{h}{b}$$

Daraus: $b = \frac{h}{c}$ und folglich $W_x = \frac{h^3}{6c}$

*) Vergl. R. Land, „Profilbestimmung von rechteckigen Balkenquerschnitten bei schiefer Belastung" in Zeitschr. d. V. d. J. 1899 S. 239.

Setzt man diesen Wert in Gl. 79) ein, so ergibt sich für die Seite h der Ausdruck:

$$h^3 = \frac{6c}{k}(\mathfrak{M}_1 + c\,\mathfrak{M}_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 80)$$

Wird, wie es vielfach geschieht, das Seitenverhältnis $c = h : b$ von vornherein angenommen, so ergibt sich h unmittelbar aus Gl. 80) und danach auch $b = h : c$.

Will man dagegen die bei staatlichen Bauten durch Erlaß des preußischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten vorgeschriebenen Normalprofile für Bauhölzer*) benutzen, so setze man für c einen vorläufigen Mittelwert ein. Dabei kann man bei den von der Quadratform am meisten abweichenden Querschnitten (beim Quadrat ist $c = 1$) etwa annehmen:

für starke Querschnitte (von $^{18}/_{24}$ cm ab): $c = 1{,}3$
für mittelstarke Querschnitte ($^{14}/_{20}$ und $^{16}/_{22}$ cm): $c = 1{,}4$.

Nötigenfalls wiederholt man die kurze Rechnung, wenn für den vorläufig ermittelten Querschnitt der angenommene c-Wert wesentlich von dem nunmehr genauer festzustellenden abweicht.

Die Abmessungen der Normalprofile in cm für Bauhölzer nebst den zugehörigen c-Werten sind in folgender Tabelle aufgeführt.

| Höhe h = | Breite b = | c = | Höhe h = | Breite b = | c = | Höhe h = | Breite b = | c = |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 1,00 | 18 | 14 | 1,29 | 24 | 18 | 1,33 |
| | | | | 16 | 1,125 | | 20 | 1,20 |
| 10 | 8 | 1,25 | | 18 | 1,00 | | 24 | 1,00 |
| | 10 | 1,00 | | | | | | |
| | | | 20 | 14 | 1,43 | 26 | 20 | 1,30 |
| 12 | 10 | 1,20 | | 16 | 1,25 | | 24 | 1,08 |
| | 12 | 1,00 | | 18 | 1,11 | | 26 | 1,00 |
| | | | | 20 | 1,00 | | | |
| 14 | 10 | 1,40 | | | | 28 | 22 | 1,27 |
| | 12 | 1,17 | 22 | 16 | 1,375 | | 26 | 1,08 |
| | 14 | 1,00 | | 18 | 1,22 | | 28 | 1,00 |
| | | | | 20 | 1,10 | | | |
| 16 | 12 | 1,33 | | | | 30 | 24 | 1,25 |
| | 14 | 1,14 | | | | | 28 | 1,07 |
| | 16 | 1,00 | | | | | | |

Aufgabe 48. Eine Decke ist aus I-Eisen und zwischen gespannten ½ Stein (0,12 m) starken Backsteinkappen mit $^1/_{10}$ Stich ausgeführt.

Die Spannweite der Träger beträgt: $l = 3{,}7$ m
Die Entfernung der Träger beträgt: $b = 1{,}2$ m
Die Verkehrsbelastung ist angenommen zu: $p = 185$ kg/qm

*) Centralbl. d. Bauverw. 1898 S. 373.

Es sollen die Deckenträger berechnet werden unter der Annahme, daß ein anschließendes Feld die volle Verkehrsbelastung aufzunehmen hat, das andere nur durch das Eigengewicht belastet ist (Fig. 91).

Auflösung. Das Gewicht einer halben Kappe beträgt (bei $\gamma = 1600$ kg) für 1 m Tiefe angenähert:

$$G_1 = 0{,}6 \,.\, 0{,}12 \,.\, 1600 = 115 \text{ kg}$$

Dazu für Schlackenauffüllung und Fußboden ($\gamma_1 = 850$) bei 0,1 m mittlerer Stärke:

$$G_2 = 0{,}6 \,.\, 0{,}1 \,.\, 850 = 51 \text{ kg}$$

Zusammen:

$$G = 115 + 51 = 166 \text{ kg}$$

Verkehrsbelastung:

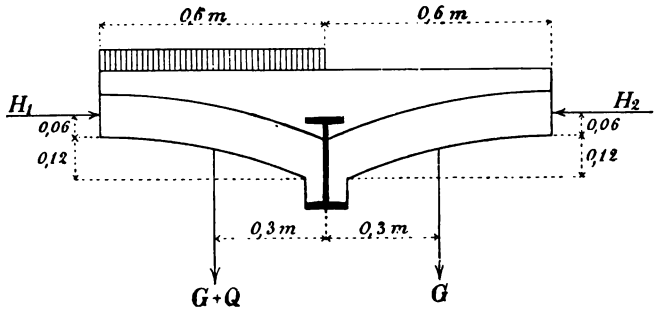
$$Q = 0{,}6 \,.\, 185 = 111 \text{ kg}$$

Nimmt man an, daß die Angriffspunkte der Lasten um 0,3 m von der Trägerachse entfernt sind, und daß die Horizontalschübe $H_1$ und $H_2$ der Gewölbekappen in der Mitte der Scheitelfuge angreifen (was streng genommen nicht ganz zutreffend ist), so erhält man:

$$H_1 = \frac{(G + Q)\ 0{,}3}{0{,}06 + 0{,}12} = \frac{(166 + 111)\ 0{,}3}{0{,}18} = 462 \text{ kg}$$

$$H_2 = \frac{G \,.\, 0{,}3}{0{,}06 + 0{,}12} = \frac{166 \,.\, 0{,}3}{0{,}18} = 277 \text{ kg}$$

Fig. 91.




Danach hat der Träger einen wagerechten Schub für 1 m Länge aufzunehmen von der Größe:

$$H = H_1 - H_2 = 462 - 277 = 185 \text{ kg}$$

Die lotrechte Belastung für 1 m Länge beträgt:

$$P = 2\,G + Q = 2 \,.\, 166 + 111 = 443 \text{ kg}$$

Hieraus ergeben sich die Momente:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{3{,}7\,P \,.\, l}{8} = \frac{3{,}7 \,.\, 443 \,.\, 370}{8} = 75808$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{3{,}7\,H \,.\, l}{8} = \frac{3{,}7 \,.\, 185 \,.\, 370}{8} = 31658$$

Nach Gl. 79) S. 106 ist dann (bei k = 1000), wenn vorläufig c = 8 angenommen wird:

$$W_x = \frac{75808 + 8 \,.\, 31658}{1000} = 329$$

Das nächstliegende Profil ist (nach der Tabelle S. 29) Nr. 24 mit $W_x = 353$. Für dieses ist genau:

$$c = \frac{W_x}{W_y} = 8{,}5$$

folglich wird:

$$W_x = \frac{75808 + 8{,}5 \,.\, 31658}{1000} = 345$$

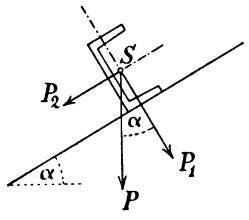
d. h. I-Eisen Nr. 24 genügt als Trägerquerschnitt.

Aufgabe 49. Bei einem eisernen Dache sei die wagerechte Entfernung der Pfetten = 2,4 m, die Binderentfernung b = 3,2 m. Der Neigungswinkel der Dachfläche ist angenommen zu $\alpha = 21^\circ 50'$ (entsprechend $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4 = 1 : 2{,}5$). Die lotrechte Belastung für 1 qm Grundrißfläche betrage p = 175 kg. Es soll das erforderliche Profil der aus [-Eisen zu bildenden Pfette berechnet werden (Fig. 92).

Auflösung. Die lotrechte Belastung der Pfette ist:

$$P = 2{,}4 \,.\, 3{,}2 \,.\, 175 = 1344 \text{ kg}$$

Fig. 92.




Durch Zerlegung erhält man:

$$P_1 = P \cos\alpha = 1344 \,.\, 0{,}92827 = 1248 \text{ kg}$$
$$P_2 = P \sin\alpha = 1344 \,.\, 0{,}37191 = 500 \text{ kg}$$

Demnach sind, wenn die Pfette als Träger auf 2 Stützen behandelt wird, die Momente:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{P_1 b}{8} = \frac{1248 \,.\, 320}{8} = 49920$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{P_2 b}{8} = \frac{500 \,.\, 320}{8} = 20000$$

Nach Gl. 79) S. 106 ist (bei k = 1000) und vorläufiger Annahme von c = 6:

$$W_x = \frac{49920 + 6 \,.\, 20000}{1000} = 170$$

Das nächstliegende Profil ist (nach Tabelle 1 S. 28) Nr. 20 mit W = 191. Für dieses ist genau c = 7,09, folglich würde bei Beibehaltung des Profiles Nr. 20 die Inanspruchnahme betragen:

$$k = \frac{49920 + 7{,}09 \,.\, 20000}{191} = 1004 \text{ kg/qcm}$$

## § 13.

## Widerstand gegen Abscherung.

Der Widerstand gegen Abscherung tritt dann auf, wenn die äußeren Kräfte einen Teil des Körpers von dem anderen in einer Fläche abzuschieben oder abzuscheren streben. Dieser Widerstand ist verhältnisgleich der abzuscherenden Fläche.

Ist daher P die auf die Abscherung wirkende Kraft, F die abzuscherende

Fläche und t die dabei auftretende innere Spannung, so ist unter der Annahme, daß sich die Kraft gleichmäßig über die Querschnittsfläche verteilt:

$$P = F \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 81)$$

Soll der Körper dem Abscheren mit Sicherheit widerstehen, so darf die Schubspannung t eine gewisse zulässige Grenze nicht überschreiten, und zwar kann man für Metalle annehmen:

$$t = \frac{4}{5} k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 82)$$

wobei für k der kleinere Wert der nach der Tabelle § 1 S. 4 zulässigen Inanspruchnahme gegen Zug oder Druck einzusetzen ist.

Beim Holz kann man parallel zur Faserrichtung annehmen:

für Tannenholz $t = 4{,}5$ kg
für Kiefernholz $t = 6$ kg
für Eichenholz $t = 8$ kg

In der Richtung rechtwinklig zur Stammachse gilt Gl. 82).

Aufgabe 50. Wie groß muß der Durchmesser d eines schmiedeeisernen Bolzens sein, welcher eine Schubkraft von 6000 kg mit Sicherheit aufnehmen soll?

Auflösung. Da hier:

$$k = {}^4/_5 \cdot 1000 = 800 \text{ kg}$$

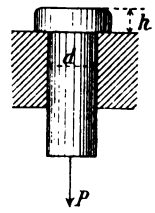
einzusetzen ist, so wird:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot 800 = 6000$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 6000}{3{,}14 \cdot 800}} = 3{,}1 \text{ cm}$$

Aufgabe 51. Ein schmiedeeiserner Bolzen (Fig. 93) soll durch eine in der Achsenrichtung wirkende Kraft $P = 8000$ kg belastet sein. Wie groß muß der Durchmesser d und wie groß die Kopfhöhe h ausgeführt werden?

Fig. 93.




Auflösung. Der Durchmesser d ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot k = P$$

zu:

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi k}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 8000}{3{,}14 \cdot 1000}} = 3{,}2 \text{ cm}$$

Die abzuscherende Fläche des Kopfes ist:

$$F = d \pi h$$

folglich:

$$d \pi h \cdot {}^4/_5 k = P$$

$$h = \frac{P}{d \pi \, {}^4/_5 k} = \frac{8000}{3{,}2 \cdot 3{,}14 \cdot 800} = 1 \text{ cm}$$

Aufgabe 52. Eine Blechtafel von $\delta = 1{,}2$ cm Stärke soll mit Nietlöchern von $d = 2{,}5$ cm Durchmesser versehen werden. Wie groß ist die zum Durchstoßen der Löcher erforderliche Kraft P, wenn man die Inanspruchnahme, bei welcher der Bruch erfolgt, $= 4000$ kg annimmt?

Auflösung. Die abzuscherende Fläche ist:

$$F = d \cdot \pi \cdot \delta = 2{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}2 = 9{,}42 \text{ qcm}$$

folglich:

$$P = 9{,}42 \cdot 4000 = 37680 \text{ kg}$$

Aufgabe 53. Welcher Schubkraft kann ein Nagel aus Eichenholz von 2,6 cm Durchmesser mit Sicherheit widerstehen?

Auflösung. Die abzuscherende Fläche ist:

$$F = \frac{2{,}6^2 \cdot 3{,}14}{4} = 5{,}31 \text{ qcm}$$

für:

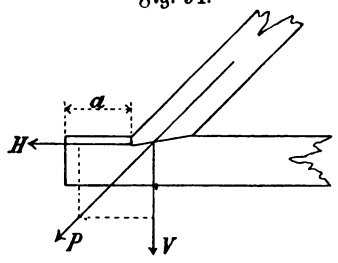
$$t = {}^4/_5 \cdot 80 = 64 \text{ kg}$$

wird dann:

$$P = 5{,}31 \cdot 64 = 340 \text{ kg}$$

Aufgabe 54. Auf den Balken eines Hängewerkes wird durch die versetzte Strebe eine wagerechte Schubkraft H = 2484 kg ausgeübt (Fig. 94). Die Breite b von Balken und Strebe sei = 18 cm. Wie groß muß das Maß a angenommen werden, wenn der Balken aus Kiefernholz vorausgesetzt wird?

Fig. 94.




Auflösung. Die abzuscherende Fläche ist:

$$F = a \cdot b = a \cdot 18$$

für:

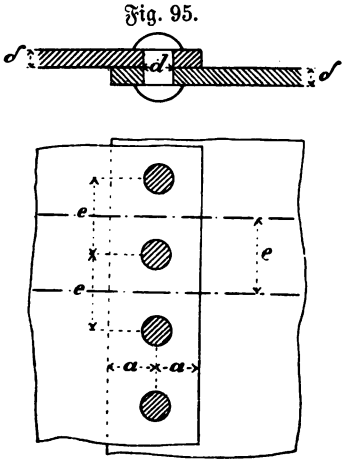
$t = 6$ kg (parallel zur Faserrichtung)

wird dann:

$$a \cdot 18 \cdot 6 = 2484$$

$$a = \frac{2484}{18 \cdot 6} = 23 \text{ cm}$$

Fig. 95.




Aufgabe 55. Bei einer einfachen Vernietung (Fig. 95) soll die Entfernung e der Nieten voneinander und das Maß a, d. i. die Entfernung von Nietmitte bis Blechrand berechnet werden unter der Annahme, daß der Nietdurchmesser doppelt so groß als die Blechstärke ($d = 2\,\delta$) gewählt wird.

Auflösung. Eine Abscherung der Niete darf nicht eher eintreten als ein Zerreißen des Bleches zwischen den Nieten.

Denkt man sich also einen Streifen von der Breite der Nietteilung e herausgeschnitten, so ist für diesen:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{5} k_{\text{Niet}} = (e - d)\, \delta\, k_{\text{Blech}}$$

Da für die Niete, welche starke Formänderung ertragen müssen, ein weit besseres Eisen verwendet wird, als für das Blech, so darf man annehmen:

$$^4/_5\, k_{\text{Niet}} = k_{\text{Blech}}$$

wodurch aus der letzten Gleichung, wenn darin noch $\delta = {}^1/_2\, d$ gesetzt wird, folgt:

$$\frac{d^2\pi}{4} = (e - d)\,\frac{d}{2}$$

$$e = \left(1 + \frac{3{,}14}{2}\right) d$$

dafür genügend genau:

$$\mathbf{e = 2{,}5\, d}$$

Ferner darf eine Abscherung der Niete nicht eher eintreten als ein Herausschieben oder Aufstauchen des Bleches vor den Nieten; daher ist für einen Streifen von der Breite e:

$$\frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{4}{5}\, k_{\text{Niet}} = 2\left(a - \frac{d}{2}\right)\delta\,\frac{4}{5}\, k_{\text{Blech}}$$

Setzt man wieder:

$$^4/_5\, k_{\text{Niet}} = k_{\text{Blech}}$$

und:

$$\delta = {}^1/_2\, d$$

so folgt:

$$\frac{d^2\pi}{4} = 2\left(a - \frac{d}{2}\right)\frac{d}{2}\,\frac{4}{5}$$

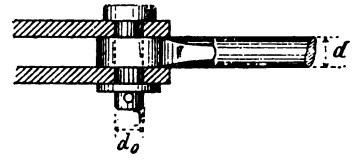
$$a = \left(\frac{5 \cdot 3{,}14}{16} + \frac{1}{2}\right) d$$

dafür genügend genau:

$$\mathbf{a = 1{,}5\, d}$$

Aufgabe 56. Die schmiedeeiserne Zugstange eines Dachbinders sei mit $P = 10000$ kg belastet und soll mittels eines Stahlbolzens mit zwei Knotenblechen verbunden werden (Fig. 96). Wie groß ist der Durchmesser d der Zugstange, und wie groß der Durchmesser $d_0$ des Bolzens auszuführen?

Fig. 96.




Auflösung. Der Durchmesser der Zugstange ergibt sich (bei $k = 1000$ kg) aus der Gleichung:

$$\frac{d^2\pi}{4} \cdot 1000 = 10000$$

zu:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 10000}{3{,}14 \cdot 1000}} = \sim 3{,}6 \text{ cm}$$

Wird das Auge der Stange in derselben Breite ausgeführt, so kann der Bolzen angesehen werden als ein an beiden Enden eingespannter Träger von 3,6 cm Länge, welcher durch 10000 kg gleichmäßig belastet ist. Die Berechnung desselben geschieht nach Gl. 68) S. 96, worin:

$$p\,l = 10000$$

$$W = \frac{d_0^3\pi}{32}$$

einzusetzen ist.

$$10000 \cdot \frac{3{,}6}{12} = k \cdot \frac{d_0^3 \pi}{32}$$

für $k = 1200$ wird dann:

$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10000 \cdot 3{,}6}{12 \cdot 1200 \cdot 3{,}14}} = \sim 3{,}0 \text{ cm}$$

Wollte man den Bolzen auf Abscherung berechnen, so würde man zu geringe Abmessungen erhalten, wie sich aus folgender Rechnung ergibt.

Da der Bolzen zweischnittig ist, d. h. da hier zwei Querschnitte abzuscheren sind, so ist:

$$2 \frac{d_0^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 1200 = 10000$$

$$\frac{d_0^2 \pi}{4} = \frac{10000}{2 \cdot {}^4/_5 \cdot 1200} = 5{,}2 \text{ qcm}$$

$$d_0 = 2{,}6 \text{ cm}$$

Das Beispiel zeigt, daß bei Bolzenverbindungen wie in Fig. 96 die Beanspruchung auf Biegung häufig größer ausfallen kann als auf Abscherung. In zweifelhaften Fällen thut man gut, beide Rechnungen, auf Biegung und auf Abscherung durchzuführen.

## § 14.

## Widerstand gegen Zerknicken.

Ist ein gerader prismatischer Stab vom Querschnitt F mit seinen Enden A und B gelenkartig befestigt und wirkt, während der untere Endpunkt unterstützt ist, an dem oberen Endpunkte und in der Achsenrichtung des Stabes eine Kraft P, so erzeugt diese nach § 2 eine Druckspannung:

$$k = \frac{P}{F}$$

Je länger der Stab im Verhältnis zu seinem Querschnitt ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, daß er unter Einwirkung der Kraft P seine ursprünglich gerade Lage beibehält: es wird vielmehr, wenn die Kraft P groß genug und der Stab lang genug ist, eine seitliche Ausbiegung eintreten und infolgedessen entsteht dann außer der Druckspannung k in dem Stabe noch eine Biegungsspannung, hervorgebracht durch das Moment der Kraft P.

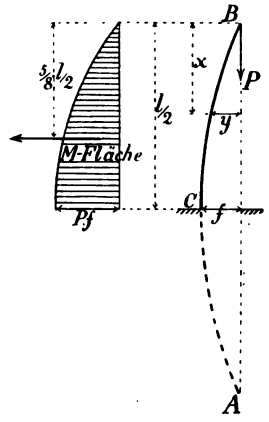
Bei allmählichem Anwachsen der Kraft P wird schließlich durch gleichzeitige Wirkung der Druckspannung k und der Biegungsspannung eine Zerstörung eintreten, der Stab wird zerknickt werden.

Lange dünne Stäbe werden daher eher zerknickt als zerdrückt und müssen außer auf Druck auch noch auf Zerknicken berechnet werden.

Der Stab AB (Fig. 97) erfahre durch die Kraft P in der Mitte die Durchbiegung f und befinde sich im Gleichgewicht. Wir denken uns den unteren Teil desselben bis zu der Mitte C fest eingespannt.

Es läßt sich nachweisen, daß die Biegungskurve C B eine Sinuslinie ist; statt derselben soll hier annäherungsweise die Parabel angenommen werden. Die Durchbiegung y der Stabachse in der Entfernung x vom Punkte B ist zugleich der Hebelarm der Kraft P, so daß das Moment an dieser Stelle = P y ist. Das Moment bei C, wo die Durchbiegung f auftritt, ist = P f. Die Momente sind also P-mal so groß als die Durchbiegungen, und die Momentenfläche wird danach begrenzt durch eine Parabel mit der Scheitelordinate P f.

Fig. 97.




Da der Abstand des Schwerpunktes der Parabelfläche vom oberen Ende $= \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5\,l}{16}$ beträgt*), so ist nach Gl. 34) S. 44:

$$f = \frac{1}{EJ}\left(\frac{2}{3} P f \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{5\,l}{16} = \frac{5}{48} \frac{P f l^2}{EJ}$$

Daraus ergibt sich für die Kraft P der Ausdruck**):

$$\left| P = \frac{48}{5} \frac{EJ}{l^2} = 9{,}6 \frac{EJ}{l^2} \right. \quad \ldots \ldots \quad 83)$$

Wird als Biegungskurve die Sinuslinie zu Grunde gelegt (wie es streng genommen sein sollte), so erhält man die genaue Eulersche Formel:

$$\left| P = \frac{\pi^2}{l^2} EJ = 9{,}87 \frac{EJ}{l^2} \right. \quad \ldots \ldots \quad 84)$$

Von dieser Kraft P, welche gerade hinreichen würde, ein Zerknicken des Stabes herbeizuführen, ist, um Sicherheit zu haben, daß ein Zerknicken nicht stattfindet, für auszuführende Konstruktion nur ein gewisser Teil, allgemein $^1/_n$ P zu nehmen.

Danach ist die praktische Tragkraft gegen Zerknicken eines an beiden Enden gelenkartig befestigten Stabes von der Länge l (Fig. 98):

$$\left| P = \frac{1}{n} \frac{\pi^2}{l^2} EJ \right. \quad \ldots \ldots \quad 85)$$

Ist das untere Ende des Stabes fest eingespannt, das obere Ende gelenkartig befestigt (Fig. 99), so ist die Tragkraft:

$$\left| P = \frac{2}{n} \frac{\pi^2}{l^2} EJ \right. \quad \ldots \ldots \quad 86)$$

Sind beide Enden des Stabes fest eingespannt (Fig. 100), so wird:

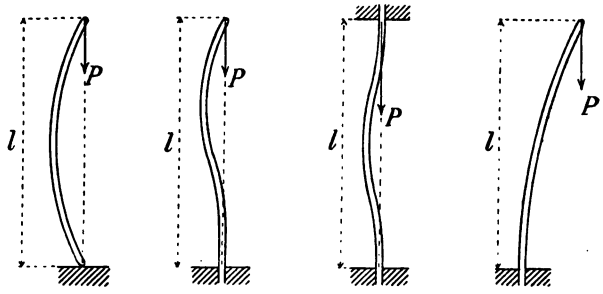
$$\left| P = \frac{4}{n} \frac{\pi^2}{l^2} EJ \right. \quad \ldots \ldots \quad 87)$$

*) Siehe Lauenstein, Mechanik. 4. Aufl. S. 49, Gl. 45).

**) Vergl. R. Land in Zeitschr. d. V. d. J. 1896 S. 99 und Könen im Centralblatt der Bauverw. 1884 S. 545.

Ist ein Stab von der Länge l mit seinem unteren Ende fest eingespannt, während das obere Ende vollständig frei ist, also seitlich ausweichen kann (Fig. 101), so ist derselbe anzusehen als die Hälfte eines an beiden Enden gelenkartig be-

Fig. 98. Fig. 99. Fig. 100. Fig. 101.




festigten Stabes (Fig. 97) von der Länge 2 l. Man erhält daher für diesen Fall die Tragkraft P, indem man in Gl. 85): 2 l für l einsetzt, zu:

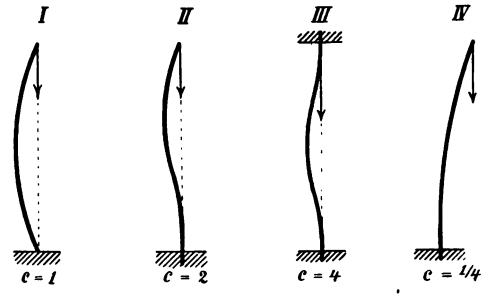
$$P = \frac{1/4}{n} \frac{\pi^2}{l^2} EJ \quad \ldots \ldots \ldots \quad 88)$$

Die Formeln 85) bis 88) lassen sich zusammenfassen in die allgemeine Zerknickungsformel:

$$P = \frac{c}{n} \frac{\pi^2}{l^2} EJ \quad \ldots \ldots \ldots \quad 89)$$

worin für c die in Fig. 102 Fall I bis IV angegebenen, durch die Art der Einspannung bedingten Werte einzusetzen sind.

Fig. 102.




Der Zahlenwert n ist abhängig vom Materiale, und zwar kann man annehmen:

für Schmiedeeisen . . n = 5*)
für Gußeisen . . . . n = 7,5
für Holz und Stein . n = 12,5

*) Im Maschinenbau pflegt man bei solchen beweglichen Teilen, die auf Zerknicken zu berechnen sind (wie z. B. Kolbenstangen und Schubstangen), die Sicherheit größer zu nehmen und geht wohl bei Schmiedeeisen bis zu n = 20 und sogar weiter. Man nimmt dabei n um so größer an, je langsamer die Maschine geht.

Der Einspannungsfall IV kommt bei Säulen nur sehr selten vor, da diese an ihrem oberen Ende mit den übrigen Konstruktionsteilen meist so verbunden sind, daß ein Ausweichen aus der ursprünglichen Stabachse ausgeschlossen ist.

Der Fall II liegt vor, wenn die Säule einen fest angegossenen oder angeschraubten, mit Verstärkungsrippen versehenen, genügend großen Fuß besitzt.

Am meisten kommt wohl der Fall I vor, nach welchem auch dann zu rechnen ist, wenn die Säule auf einen für sich hergestellten, breiteren Fuß aufgesetzt ist. Es genügt dann aber, die freie Länge der Säule von Oberkante Fuß aus zu bemessen.

Für den Einspannungsfall I erhält man aus Gl. 89), wenn man, wie es bei praktischen Berechnungen üblich ist, $\pi^2 = 10$ setzt:

$$P = 2\,\frac{EJ}{l^2} \quad \text{für Schmiedeeisen} \quad \ldots\ldots 90)$$

$$P = \frac{4}{3}\,\frac{EJ}{l^2} \quad \text{für Gußeisen} \quad \ldots\ldots 91)$$

$$P = \frac{4}{5}\,\frac{EJ}{l^2} \quad \text{für Holz und Stein} \quad \ldots\ldots 92)$$

Ist, was meistens der Fall, die Belastung P gegeben, so sind die Gleichungen 89) bezw. 90) bis 92) für J aufzulösen und danach die Querschnittsabmessungen der Säule zu berechnen, wobei zu beachten ist, daß bei freistehenden Säulen J immer das kleinste Trägheitsmoment der Querschnittsfläche bedeutet.

Bei den aus mehreren Teilen zusammengesetzten Querschnitten der schmiedeisernen Stützen ist es erforderlich, dieselben in solchen Entfernungen $l_1$ miteinander zu verbinden, daß gegen ein Einknicken der einzelnen Teile zwischen den Stützpunkten genügende Sicherheit vorhanden ist.

Bedeutet z die Anzahl der den Gesamtquerschnitt bildenden Eisen, i das kleinste Trägheitsmoment eines solchen Eisens, so wird nach Gl. 90):

$$\frac{P}{z} = 2\,\frac{Ei}{l_1^2}$$

woraus sich für die größte zulässige Entfernung $l_1$ der Verbindungspunkte voneinander der Wert ergibt:

$$l_1 = \sqrt{\frac{z}{P}\,2Ei} \quad \ldots\ldots 93)$$

Zur Berechnung der Tragfähigkeit der Säulen wird außer der Gleichung 89) (von Euler) häufig auch noch die folgende für den Einspannungsfall I geltende Erfahrungsformel von Schwarz benutzt:

$$P = kF\,\frac{J}{J + \alpha F l^2}$$

worin k die zulässige Druckbeanspruchung des Materials und F die Querschnittsfläche der Säule bedeutet, die Größen P J l aber die bereits oben angegebene Bedeutung haben.

Der Zahlenwert $\alpha$ ist vom Materiale abhängig; man kann als Mittelwerte annehmen:

$$\alpha = \frac{1}{10000} \text{ für Schmiedeeisen}$$

$$\alpha = \frac{1}{5000} \text{ „ Gußeisen}$$

$$\alpha = \frac{1}{6000} \text{ „ Holz}$$

Für den Einspannungsfall II ist: 0,7 l
„ „ „ III „ 0,5 l
„ „ „ IV „ 2 l

statt l in die Formel einzusetzen.

Die Belastung P, welche ein Stab ertragen kann, ohne zerknickt zu werden, ist nach den aufgeführten Formeln umgekehrt proportional dem Quadrate der Stablänge, nimmt also bei zunehmender Stablänge rasch ab, wogegen diejenige Belastung, welche ein Zerdrücken des Stabes bewirken würde, unabhängig von der Länge desselben ist.

Während daher bei langen dünnen Stäben die Gefahr des Zerknickens größer ist als die Gefahr des Zerdrückens, werden umgekehrt kurze Stäbe eher zerdrückt als zerknickt.

Bei einer gewissen Länge wird der Stab ebenso leicht zerdrückt als zerknickt. Diese Länge ergibt sich, wenn in die allgemeine Zerknickungsformel (Gl. 89) S. 116

$$P = k \cdot F$$

eingesetzt wird, zu:

$$l = \sqrt{\pi^2 \frac{c}{n} \frac{EJ}{kF}}$$

So z. B. wird für den Belastungsfall I und für Schmiedeeisen ($\pi^2 = 10$ gesetzt):

$$l = \sqrt{2 \frac{EJ}{kF}}$$

Für den vollen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser d ist:

$$J = \frac{d^4 \pi}{64}; \qquad F = \frac{d^2 \pi}{4}$$

also:

$$\frac{J}{F} = \frac{d^2}{16}$$

Nimmt man dann noch an:

$$E = 2000000$$
$$k = 1000$$

so erhält man:

$$l = \sqrt{2 \frac{2000000}{1000} \cdot \frac{d^2}{16}} = 15{,}8 \cdot d$$

Für $l < 15{,}8 \cdot d$ braucht der Stab nur auf Druck berechnet zu werden, für $l > 15{,}8 \cdot d$ ist die Berechnung auf Zerknicken maßgebend.

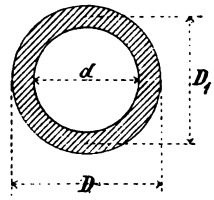
In derselben Weise kann die Untersuchung auch für andere Querschnitte durchgeführt werden.

Bei der ersten vorläufigen Berechnung der Säulen von ringförmigem Querschnitt ist es, wenn keine Tabellen der Trägheitsmomente zur Hand sind, genügend, statt des genauen Trägheitsmomentes einen bequemeren Annäherungsausdruck zu benutzen, der sich folgendermaßen ableiten läßt (Fig. 103):

$$J = \frac{(D^4 - d^4)\,\pi}{64}$$

$$J = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} \cdot \frac{(D^2 + d^2)}{16}$$

Fig. 103.




Der erste Faktor der rechten Seite ist der Flächeninhalt des Querschnittes. Bezeichnet man mit $D_1$ den mittleren Durchmesser:

$$D_1 = \frac{D + d}{2}$$

und mit $\delta$ die Wandstärke der Säule, so wird:

$$\frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = D_1\,\pi\,\delta$$

Für den zweiten Faktor der rechten Seite kann man annähernd setzen:

$$\frac{D^2 + d^2}{16} = \frac{D_1^2}{8}$$

woraus dann folgt:

$$J = \frac{\pi}{8}\,D_1^3\,\delta$$

dafür genügend genau:

$$\mathbf{J = 0{,}4\,D_1^3\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 94)$$

Nach dieser Gleichung kann der Durchmesser $D_1$ berechnet werden, wenn für $\delta$ ein bestimmter Wert angenommen wird. Für mittlere Verhältnisse kann man etwa annehmen:

$$\delta = 2 \text{ cm bis } 2{,}5 \text{ cm}$$

Aufgabe 57. Welche Belastung kann ein 3 m langer rechteckiger Pfosten aus Eichenholz ertragen, dessen Querschnittsseiten b = 16 cm und h = 18 cm sind, unter Annahme des Einspannungsfalles I (Fig. 102 S. 116)?

Auflösung. In Gl. 92) S. 117 ist einzusetzen:

$$E = 120000$$

$$l = 300$$

$$J = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{18 \cdot 16^3}{12} = 6144$$

Es wird dann:

$$P = \frac{4}{5}\,\frac{120000 \cdot 6144}{300^2} = 6554 \text{ kg}$$

Da der Querschnitt der Säule:

$$F = 16 \cdot 18 = 288 \text{ qcm}$$

ist, so beträgt die Inanspruchnahme auf Druck:

$$k = \frac{P}{F} = \frac{6554}{288} = \sim 28 \text{ kg}$$

Aufgabe 58. Welche Belastung kann eine runde schmiedeeiserne Säule von 8 cm Durchmesser und 3,6 m Länge tragen, wenn beide Enden derselben fest eingespannt sind?

Auflösung. In Gl. 89) S. 116 ist zu setzen:

$$c = 4$$
$$n = 5$$
$$l = 360$$
$$E = 2000000$$

$$J = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{8^4 \cdot 3{,}14}{64} = 201$$

folglich wird ($\pi^2 = 10$ gesetzt):

$$P = \frac{4}{5} \cdot \frac{10 \cdot 2000000 \cdot 201}{360^2} = 24815 \text{ kg}$$

Die Tragfähigkeit auf Druck bei $k = 1000$ kg würde sein:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot k = 50{,}2655 \cdot 1000 = 50266 \text{ kg}$$

Aufgabe 59. Eine gußeiserne Säule von ringförmigem Querschnitt und 4,5 m Länge sei mit 30000 kg belastet. Wie groß muß der äußere Durchmesser D der Säule genommen werden, wenn der Fuß derselben als fest eingespannt, der Kopf als geführt betrachtet werden kann, und die Wandstärke $\delta = 2$ cm gewählt wird?

Auflösung. Aus Gl. 89) folgt:

$$J = \frac{P l^2}{E} \frac{n}{c \pi^2} = \sim \frac{P l^2 n}{10 E c}$$

Hierin ist zu setzen:

$$n = 7{,}5$$
$$c = 2$$
$$P = 30000$$
$$l = 450$$
$$E = 1000000$$

Es wird dann:

$$J = \frac{30000 \cdot 450^2 \cdot 7{,}5}{10 \cdot 1000000 \cdot 2} = 2278$$

Der mittlere Durchmesser $D_1$ (siehe Fig. 103) ist aus Gl. 94) S. 119 zu bestimmen:

$$2278 = 0{,}4\, D_1^3 \cdot 2$$

$$D_1 = \sqrt[3]{\frac{2278}{2 \cdot 0{,}4}} = 14{,}2 \text{ cm}$$

Danach wird der äußere Durchmesser:

$$D = D_1 + \delta = 16{,}2 \text{ cm}$$

und der innere Durchmesser:

$$d = D_1 - \delta = 12{,}2 \text{ cm}$$

Die Querschnittsfläche der Säule ist:

$$F = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 89{,}22 \text{ qcm}$$

folglich beträgt die Inanspruchnahme auf Druck:

$$k = \frac{30000}{89{,}22} = 336 \text{ kg}$$

Aufgabe 60. Eine hölzerne Strebe von 3,2 m Länge und quadratischem Querschnitt, welche einen Druck von 16000 kg aufzunehmen hat, soll unter Annahme des Einspannungsfalles I (Fig. 102 S. 116) berechnet werden.

Auflösung. Aus Gl. 92) S. 117 folgt:

$$J = \frac{5}{4} \cdot \frac{P l^2}{E} = \frac{5}{4} \cdot \frac{16000 \cdot 320^2}{120000}$$

$$J = 17067$$

Wird die Seite des quadratischen Querschnittes mit a bezeichnet, so ist:

$$J = \frac{a^4}{12}$$

folglich:

$$17067 = \frac{a^4}{12}$$

$$a = \sqrt[4]{12 \cdot 17067} = 21{,}3 \text{ cm}$$

Querschnitt: $a^2 = 453{,}7$

Inanspruchnahme auf Druck: $k = \frac{16000}{453{,}7} = 35 \text{ kg}$

Aufgabe 61. Eine hohle gußeiserne runde Säule, 4,55 m lang, erfährt eine Belastung von 40000 kg. Welche Querschnittsabmessungen muß die Säule erhalten, wenn dieselbe am oberen und unteren Ende frei und in der ursprünglichen Achse geführt ist?

Auflösung. Nach Gl. 91) S. 117 ist:

$$J = \frac{3}{4} \frac{P l^2}{E}$$

$$J = \frac{3}{4} \cdot \frac{40000 \cdot 455^2}{1000000} = 6211$$

Bei einer Wandstärke von 2 cm wird nach Tabelle 14 S. 38 der äußere Durchmesser

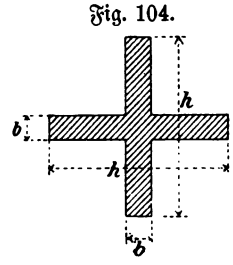
$$D = \backsim 22 \text{ cm}$$

Innerer Durchmesser: $d = 18$ cm

Querschnitt: $\frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 125{,}7$ qcm

Inanspruchnahme auf Druck: $k = \frac{40000}{125{,}7} = 318 \text{ kg}$

Fig. 104.




Aufgabe 62. Eine gußeiserne Strebe von kreuzförmigem Querschnitt (Fig. 104) und 2,5 m Länge sei mit P = 15000 kg belastet. Sie sei mittels Bolzenverbindung an die übrigen Konstruktionsteile angeschlossen, so daß der Einspannungsfall I (Fig. 102 S. 116) vorliegt. Welche Querschnittsabmessungen sind der Strebe zu geben?

Auflösung. Nimmt man an, daß die eine Rippe nur zur Aussteifung der andern dient, was zulässig ist, so ist zu setzen:

$$J = \frac{b\,h^3}{12}$$

Nach Gl. 91) S. 117 ist aber:

$$J = \frac{3}{4}\,\frac{P\,l^2}{E} = \frac{3}{4}\,\frac{15000 \,.\, 250^2}{1000000} = 703$$

folglich:

$$\frac{b\,h^3}{12} = 703$$

Wählt man:

$$b = 2 \text{ cm}$$

so wird:

$$h = \sqrt[3]{\frac{12 \,.\, 703}{2}} = \sim 16 \text{ cm}$$

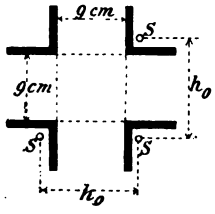
Die Querschnittsfläche ist dann:

$$F = 16 \,.\, 2 + (16 - 2)\,2 = 60 \text{ qcm}$$

folglich die Inanspruchnahme auf Druck:

$$k = \frac{15000}{60} = 250 \text{ kg}$$

Fig. 105.




Aufgabe 63. Eine schmiedeeiserne Stütze von 5 m Länge sei mit 30000 kg belastet. Der Querschnitt soll aus 4 Winkeleisen zusammengesetzt sein und es sollen dabei die in Fig. 105 eingeschriebenen Maße eingehalten werden. Die Stütze sei am unteren Ende fest eingespannt, am oberen in der ursprünglichen Achse geführt. Welche Winkeleisen sind zu verwenden?

Auflösung. Setzt man in Gl. 89) S. 116:

$$n = 5$$
$$c = 2$$

so ergibt sich das erforderliche Trägheitsmoment zu:

$$J = \frac{5}{2}\,\frac{P\,l^2}{\pi^2 E} = \sim \frac{5}{2} \,.\, \frac{30000 \,.\, 500^2}{10 \,.\, 2000000} = 937{,}5$$

Wird mit F die Querschnittsfläche eines Winkeleisens und mit $h_0$ der Abstand der Schwerpunkte bezeichnet, so ist:

$$J = 4\,F \,.\, \left(\frac{h_0}{2}\right)^2 = F \,.\, {h_0}^2$$

folglich:

$$F = \frac{J}{{h_0}^2} = \frac{937{,}5}{{h_0}^2}$$

Die Größe $h_0$ wird abgeschätzt zu:

$$h_0 = 12{,}2 \text{ cm}$$
$${h_0}^2 = 149 \text{ qcm}$$

Danach:

$$F = \frac{937{,}5}{149} = 6{,}3 \text{ qcm}$$

Gewählt wird nach Tabelle 4 § 6 S. 31 das Winkeleisen:

$$5{,}5 \times 5{,}5 \times 0{,}6$$

mit:

$$F = 6{,}31 \text{ qcm}$$

Der Gesamtquerschnitt der Stütze beträgt dann:

$$4\,F = 25{,}24 \text{ qcm}$$

und die Inanspruchnahme auf Druck würde sein:

$$k = \frac{30000}{25{,}24} = 1188 \text{ kg}$$

Der Querschnitt würde bei einer zulässigen Inanspruchnahme von $k = 1000$ daher zu schwach sein und die Stütze ist in diesem Falle nicht auf Zerknicken, sondern auf Zerdrücken zu berechnen. Die erforderliche Querschnittsfläche ergibt sich aus:

$$4\,F = \frac{30000}{1000} = 30$$

zu:

$$F = 7{,}5 \text{ qcm}$$

Gewählt wird das Winkeleisen:

$$5{,}5 \times 5{,}5 \times 0{,}8$$

mit:

$$F = 8{,}23 \text{ qcm}$$

Das kleinste Trägheitsmoment dieses Winkels ist:

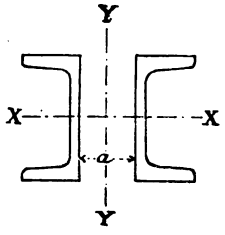
$$i = 9{,}35$$

folglich sind nach Gl. 93) S. 117 die Winkel untereinander zu verbinden in Abständen von höchstens der Größe:

$$l_1 = \sqrt{\frac{4 \,.\, 2 \,.\, 2000000 \,.\, 9{,}35}{30000}} = 71 \text{ cm}$$

d. h. es sind mindestens 6, besser 7 Verbindungen auszuführen.

Fig. 106.




Eine recht zweckmäßige Querschnittsform für schmiedeeiserne Säulen bilden zwei miteinander verbundene ⊏-Eisen, bei denen der Zwischenraum a so groß genommen wird, daß die Trägheitsmomente in Bezug auf die Achsen X X und Y Y einander gleich sind. (Fig. 106.)

Es ergeben sich dann folgende Werte für a:

| Nr. des ⊏-Eisens | 6½ | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a = | 1,54 | 2,72 | 4,14 | 5,50 | 6,82 | 8,16 | 9,48 | 10,78 | 12,22 | 13,34 | 14,60 | 15,94 | 17,24 |

Aufgabe 64. Eine Säule aus zwei ⊏-Eisen von 5,5 m Höhe ist belastet mit $P = 36000$ kg. Welches Profil ist zu wählen unter Voraussetzung des Einspannungsfalles I Fig. 102 S. 116?

Auflösung. Nach Gl. 90) S. 117 ist:

$$J = \frac{P\,l^2}{2\,E} = \frac{36000 \,.\, 550^2}{2 \,.\, 2000000} = 2722{,}5$$

Für jedes der beiden [-Eisen ist danach erforderlich:

$$J_x = \frac{J}{2} = 1361{,}25$$

Nach Tabelle 1 § 6 S. 28 genügt Nr. 18 mit:

$$J_x = 1354 \text{ und } F = 28 \text{ qcm}$$

Die Beanspruchung auf Druck beträgt:

$$k = \frac{36000}{2 \cdot 28} = 643 \text{ kg}$$

Das kleinste Trägheitsmoment eines [-Eisens ist:

$$J_{min} = 114$$

Die beiden [-Eisen sind daher miteinander zu verbinden in Abständen von:

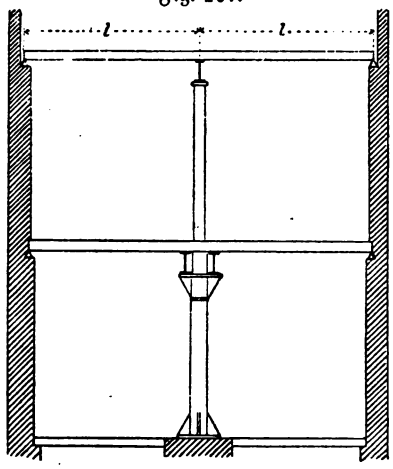
$$l_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 2000000 \cdot 114}{36000}} = 159 \text{ cm}$$

Danach sind erforderlich mindestens 3 Verbindungen.

## Beispiel der Berechnung von Balken, Unterzügen und Säulen für ein einfaches zweistöckiges Gebäude. (Fig. 107.)

### 1. Oberer Stock. (Holzbalken und eiserner Unterzug.)

Fig. 107.




Es sollen folgende Angaben zu Grunde gelegt werden:

Säulenentfernung . . . . . L = 480 cm
Säulenhöhe . . . . . H = 500 cm
Spannweite der Balken . . . . l = 400 cm
Entfernung der Balken voneinander B = 60 cm
Belastung einschließlich Eigengewicht p = 500 kg für ein Quadratmeter.

a) Holzbalken.

Die Belastung eines Trägers ist:

$$P = 4 \,.\, 0{,}6 \,.\, 500 = 1200 \text{ kg}$$

folglich das größte Moment:

$$\mathfrak{M} = \frac{1200 \,.\, 400}{8} = 60000$$

Bei $k = 60$ kg wird:

$$W = \frac{60000}{60} = 1000 = \frac{b\,h^2}{6}$$

Nimmt man $b = \frac{3}{4}\,h$, so folgt:

$$\frac{3\,h^3}{4 \,.\, 6} = 1000$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{4 \,.\, 6 \,.\, 1000}{3}} = \sqrt[3]{8000} = 20 \text{ cm}$$

$$b = \frac{3}{4}\,h = \frac{3}{4} \,.\, 20 = 15 \text{ cm}$$

b) Eiserner Unterzug.

Die Belastung ist, da die Balken als Träger auf drei Stützen $\frac{5}{8}$ ihrer Belastung auf den Unterzug übertragen:

$$P = \frac{5}{8} \,.\, L \,.\, 2l \,.\, p = \frac{5}{8} \,.\, 4{,}8 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 500 = 12000 \text{ kg}$$

Es genügt vollkommen, diese Belastung als gleichförmig verteilt anzunehmen; es wird dann:

$$\mathfrak{M} = \frac{12000 \,.\, 480}{8} = 720000$$

und für $k = 1000$ kg:

$$W = \frac{720000}{1000} = 720$$

Nach Tabelle 2 § 6 S. 29 ist erforderlich ein I-Eisen Nr. 32 mit $W_x = 781$.

Die Beanspruchung wird dann genau:

$$k = \frac{720000}{781} = 922 \text{ kg/qcm}$$

c) Säule.

Die Belastung der Säule ist gleich der des Unterzuges, also:

$$P = 12000 \text{ kg}$$

α) Gußeisen (ringförmiger Querschnitt).

$$J = \frac{3}{4}\,\frac{P\,H^2}{E} = \frac{3\,.\,12000\,.\,500^2}{4\,.\,1000000} = 2250$$

Nach Tabelle 14 S. 38 genügt: D = 17 cm bei $\delta = 1{,}6$ cm. Der innere Durchmesser wird dann: d = 13,8 cm.

Querschnitt der Säule:

$$F = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 77{,}4 \text{ qcm} = 0{,}00774 \text{ qm}$$

Beanspruchung der Säule auf Druck:

$$k = \frac{P}{F} = \frac{12000}{77{,}4} = 155 \text{ kg}$$

Gewicht der Säule (1 cbm Gußeisen = 7250 kg):

$$G = 0{,}00774\,.\,5\,.\,7250 + C = 280 + C$$

Rechnet man C = 40 kg (als Zuschlag für Kopf u. s. w.), so wird:

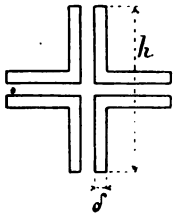
$$G = 280 + 40 = 320 \text{ kg}$$

β) Schmiedeeisen (Kreuzquerschnitt).

$$J = \frac{P\,H^2}{2\,E} = \frac{12000\,.\,500^2}{2\,.\,2000000} = 750$$

Zur vorläufigen Bestimmung der Abmessungen der erforderlichen Winkeleisen kann man statt des genauen Trägheitsmoments des Kreuzquerschnittes genügend genau setzen (Fig. 108):

Fig. 108.




$$J = \frac{2\,\delta\,h^3}{12}$$

Für $\delta = 1$ cm wird dann:

$$\frac{2\,.\,1\,.\,h^3}{12} = 750$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{12\,.\,750}{2}} = 16{,}5 \text{ cm}$$

Danach genügen Winkel $7{,}5 \times 7{,}5 \times 1$ mit 1,5 cm Zwischenraum. Die Querschnittsfläche eines Winkels ist f = 14,1 qcm, folglich ist die Beanspruchung auf Druck:

$$k = \frac{P}{4\,f} = \frac{12000}{4\,.\,14{,}1} = 213 \text{ kg}$$

Das Gewicht eines Winkels beträgt g = 11 kg für ein Meter Länge; danach berechnet sich das Gewicht der Säule zu:

$$G = 4\,.\,H\,.\,g + C$$

$$G = 4\,.\,5\,.\,11 + C = 220 + C$$

C = 30 geschätzt gibt:

$$G = 220 + 30 = 250 \text{ kg}$$

Das kleinste Trägheitsmoment eines Winkels ist:

$$i = 29{,}8$$

folglich wird nach Gl. 93) S. 117, worin $z = 4$ einzusetzen ist:

$$l_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 2000000 \cdot 29{,}8}{12000}} = 199 \text{ cm}$$

Es sind daher 2 Verbindungen der 4 Winkel untereinander erforderlich.

**2. Unterer Stock.** (Eiserne Balken und eiserner Unterzug.)

Die gegebenen Werte seien:

Säulenentfernung . . . . . $L = 480$ cm
Säulenhöhe . . . . . $H = 540$ cm
Spannweite der Balken . . . . $l = 387$ cm
Entfernung der Balken voneinander $B = 96$ cm
Belastung einschließlich Eigengewicht $p = 800$ kg für ein Quadratmeter.

a) Eiserne Balken.

Belastung eines Balkens:

$$P = 3{,}87 \cdot 0{,}96 \cdot 800 = 2972 = \sim 3000 \text{ kg}$$

Erforderliches Widerstandsmoment:

$$W = \frac{3000 \cdot 387}{8 \cdot 1000} = 145$$

Gewählt: I-Eisen Nr. 18.

b) Eiserner Unterzug.

Belastung:

$$P = {}^5/_8 \cdot 4{,}8 \cdot 2 \cdot 3{,}87 \cdot 800 = 18576$$

Erforderliches Widerstandsmoment:

$$W = \frac{18576 \cdot 480}{8 \cdot 1000} = 1115$$

Gewählt: Zwei I-Eisen Nr. 29.

c) Säule.

Die Säule wird belastet durch den Unterzug mit 18576 kg; außerdem hat dieselbe die Belastung und das Eigengewicht der Säule des oberen Stockes aufzunehmen.

α) Gußeisen (ringförmiger Querschnitt).

$$P = 18576 + 12000 + 320 = 30896 \text{ kg}$$

Das erforderliche Trägheitsmoment ist:

$$J = \frac{3}{4} \frac{P H^2}{E} = \frac{3}{4} \frac{30896 \cdot 540^2}{1000000} = 6757$$

Nach Tabelle 14 S. 38 genügt: $D = 22$ cm bei $\delta = 2{,}2$ cm

$d = 17{,}6$ cm

Querschnitt:

$$F = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 137 \text{ qcm}$$

Beanspruchung auf Druck:

$$k = \frac{30896}{137} = 226 \text{ kg}$$

Gewicht:

$$G = 0{,}0137 \,.\, 5{,}4 \,.\, 7250 + C = 536 + C$$

$C = 64$ kg geschätzt gibt: $G = 600$ kg

*β)* Schmiedeeisen (Kreuzquerschnitt).

$$P = 18576 + 12000 + 250 = 30826 \text{ kg}$$

$$J = \frac{P\,H^2}{2\,E} = \frac{30826 \,.\, 540^2}{2 \,.\, 2000000} = 2247$$

Für den Querschnitt Fig. 108 ist dann annähernd:

$$\frac{2\,\delta\,h^3}{12} = 2247$$

und für $\delta = 1{,}2$ cm:

$$h = \sqrt[3]{\frac{12 \,.\, 2247}{2 \,.\, 1{,}2}} = 22{,}4 \text{ cm}$$

Danach sind erforderlich Winkel $10 \times 10 \times 1{,}2$ mit 2,4 cm Zwischenraum.
Querschnitt eines Winkels:

$$f = 22{,}7 \text{ qcm}$$

Beanspruchung auf Druck:

$$k = \frac{P}{4\,f} = \frac{30826}{4 \,.\, 22{,}7} = 339 \text{ kg}$$

Gewicht eines Winkels:

$g = 17{,}7$ kg für ein Meter Länge

Gewicht der Säule:

$$G = 4 \,.\, 5{,}4 \,.\, 17{,}7 + C = 382 + C$$

$C = 58$ kg geschätzt gibt: $G = 382 + 58 = 440$ kg

Das kleinste Trägheitsmoment eines Winkels ist:

$$i = 86{,}2$$

folglich wird nach Gl. 93) S. 117 für $z = 4$:

$$l_1 = \sqrt{\frac{4 \,.\, 2 \,.\, 2000000 \,.\, 86{,}2}{30826}} = 212 \text{ cm}$$

Es sind daher zwei Verbindungen erforderlich.

d) Säulenfuß.

Nimmt man die zulässige Beanspruchung des Unterstützungsquaders zu $k = 18$ kg an, so ergibt sich die nötige Auflagerfläche der gußeisernen Säule zu:

$$F = \frac{30896 + 600}{18} = 1750 \text{ qcm}$$

Die Seite a des quadratischen Säulenfußes folgt dann aus:

$$F = a^2 - \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$1750 = a^2 - \frac{17{,}6^2 \cdot 3{,}14}{4}$$

$$a = \sqrt{1993} = \sim 45 \text{ cm}$$

Für die schmiedeeiserne Säule wird:

$$F = a^2 = \frac{30826 + 440}{18} = 1737 \text{ qcm}$$

$$a = \sqrt{1737} = 42 \text{ cm}$$

## § 15.

## Widerstand gegen Verdrehung.

Ein an einem Ende fest eingespannter prismatischer Stab wird durch ein am anderen freien Ende wirkendes Kräftepaar, dessen Moment M sei, auf Verdrehungsfestigkeit in Anspruch genommen, indem das Kräftepaar den Stab um seine Längsachse zu verdrehen oder zu verwinden strebt.

Der Stab soll hier als voller Kreiscylinder vorausgesetzt werden und es soll dabei angenommen werden, daß das Kräftepaar in einer Ebene wirkt, welche rechtwinklig zu der Achse des Cylinders steht.

Denkt man sich den Cylinder zusammengesetzt aus einer sehr großen Anzahl sehr dünner, unter sich gleicher Scheiben, so wird bei einer, durch das Kräftepaar bewirkten, eintretenden Verwindung jede einzelne Scheibe sich, durch eine geringe Drehung um ihren Mittelpunkt, gegen die nebenliegende Scheibe verschieben. Als innere Widerstände treten daher hier Schubspannungen auf, welche, solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird, dem äußeren Kräftepaare das Gleichgewicht halten und die einzelnen Scheiben in ihre ursprüngliche Lage zurückzudrehen streben.

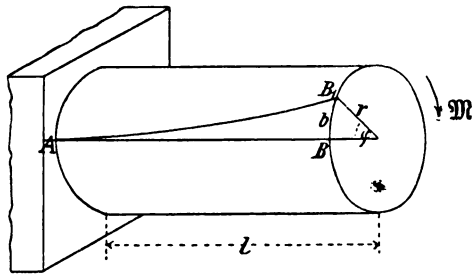
Man kann sich auch hier wieder vorstellen, es bestehe der Cylinder aus einzelnen, der Achse parallelen Fasern. Diese kommen bei einer eintretenden Verdrehung in eine solche Lage, daß jede einzelne Faser die Gestalt einer Schraubenlinie annimmt. Die von der Achse am weitesten entfernten, also die in der Mantelfläche des Cylinders liegenden Fasern, erleiden die größte Ablenkung, während die eine, mit der Achse des Cylinders zusammenfallende Faser in ihrer ursprünglichen Lage bleibt und nur in sich selbst verwunden wird.

Es sei nun A B (Fig. 109) die ursprüngliche Lage einer in der Mantelfläche eines Cylinders von der Länge l liegenden Faser, welche nach eingetretener Verdrehung in die Lage $AB_1$ gekommen sein möge. Es stellt dann der Bogen

$$BB_1 = b$$

die Verschiebung des Endpunktes B dar. Der diesem Bogen entsprechende Winkel $\varphi$, d. i. derjenige Winkel, um welchen der durch B rechtwinklig zur Achse des Cylinders gelegte Querschnitt gegen den Querschnitt an der Einspannungsstelle A unter

Fig. 109.




Einwirkung des Kraftmomentes M verdreht ist, heißt der Verdrehungswinkel. Die bei dieser Verdrehung in der Mantelfläche des Cylinders auftretende Schubspannung sei = t.

Die Verschiebung des Punktes B, also der Bogen $BB_1$, wird um so größer ausfallen, je größer das Kraftmoment wird. Man kann sich vorstellen, das Kraftmoment erreiche eine solche Größe, daß unter Einwirkung desselben der Verdrehungsbogen $BB_1$ gleich der Länge l des Cylinders würde, wenn das Material eine solche Verdrehung überhaupt zuließe und die Elastizitätsgrenze dabei nicht überschritten würde. Wird die dabei in der Mantelfläche des Cylinders auftretende Schubspannnng mit $E_1$ bezeichnet, so kann man folgendermaßen schließen:

Bei der Spannung t entsteht die Verschiebung b

" " " $E_1$ " " " l

Da sich nun erfahrungsmäßig innerhalb der Elastizitätsgrenze die Verschiebungen wie die Spannungen verhalten, so erhält man die Proportion:

$$\frac{b}{l} = \frac{t}{E_1}$$

oder:

$$b = \frac{t\,l}{E_1}$$

Bezeichnet man mit r den Halbmesser des kreisförmigen Querschnittes, so ist:

$$b = r \cdot \varphi$$

Danach erhält man für den Verdrehungswinkel die Größe:

$$\varphi = \frac{t}{E_1} \cdot \frac{l}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 95)$$

$E_l$ wird der Schub-Elastizitätsmodul genannt und ist durch Versuche bestimmt zu:

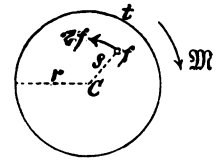
$$E_l = 0{,}4 \cdot E \quad \ldots\ldots\ldots \quad 96)$$

wobei E den Elastizitätsmodul für Zug oder Druck bedeutet (siehe § 1 S. 3).

Für den Zustand des Gleichgewichtes muß das Moment des verdrehenden Kräftepaares gleich sein dem Momente sämtlicher, in einem Querschnitte des Cylinders auftretenden Verdrehungswiderstände in Bezug auf den Mittelpunkt des Querschnitts.

Es sei Fig. 110 ein solcher Kreisquerschnitt mit dem Halbmesser r, und f ein Flächenteilchen desselben im Abstande $\varrho$ vom Mittelpunkte C. Ist $\tau$ die Schubspannung für ein Quadratcentimeter an dieser Stelle, so ist der auf das Flächenteilchen f kommende Verdrehungswiderstand $= \tau f$ und das Moment desselben in Bezug auf den Mittelpunkt $= \tau f \varrho$.

Fig. 110.




Danach ist:

$$\mathfrak{M} = \Sigma(\tau f \varrho)$$

Ist nun t die am äußeren Umfange, also in der Entfernung r vom Mittelpunkte auftretende Schubspannung, so besteht, da sich die Spannungen verhalten wie die Entfernungen vom Mittelpunkte, die Proportion:

$$\frac{\tau}{t} = \frac{\varrho}{r}$$

oder:

$$\tau = \frac{t}{r}\varrho$$

Nach Einsetzung dieses Wertes erhält man für das Moment:

$$\mathfrak{M} = \frac{t}{r}\Sigma(f\varrho^2)$$

Der Ausdruck $\Sigma(f\varrho^2)$ bedeutet die Summe aller Flächenteilchen, multipliziert mit dem Quadrate ihrer Abstände von der durch den Mittelpunkt des Querschnitts gelegten Drehachse, ist also das zentrale oder polare Trägheitsmoment der Querschnittsfläche. Wird dasselbe mit $J_c$ bezeichnet, so ist:

$$\mathfrak{M} = t\frac{J_c}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 97)$$

Ist d der Durchmesser des Kreisquerschnitts, so ist nach Gl. 22) S. 23:

$$J_c = \frac{d^4\pi}{32}$$

Setzt man dann noch in Gl. 97) $r = \frac{d}{2}$, so erhält man:

$$\mathfrak{M} = \frac{d^3\pi}{16} \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 98)$$

Hieraus ergibt sich der Durchmesser d einer Welle, welche durch das Moment:

$$\mathfrak{M} = P\,R$$

auf Verdrehung in Anspruch genommen wird, zu:

$$\mathbf{d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi\,t}} \cdot \sqrt[3]{P\,R}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 99)$$

oder da:

$$\frac{16}{\pi} = \frac{16}{3{,}14} = 5{,}093 = \sim 5{,}1$$

ist:

$$\mathbf{d = \sqrt[3]{\frac{5{,}1\,.\,P\,R}{t}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 100)$$

Für t = 365 (bei Schmiedeeisen) wird:

$$\mathbf{d = \sqrt[3]{\frac{5{,}1}{365}\,P\,R} = 0{,}24\,\sqrt[3]{P\,R}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 101)$$

Ist das verdrehende Moment nicht unmittelbar gegeben, sondern die Anzahl der zu übertragenden Pferdekräfte = N und die Anzahl der Umdrehungen in der Minute = n, so ist zu setzen*):

$$N = \frac{P\,v}{75} = P\,\frac{2\,R\,\pi\,n}{75\,.\,60\,.\,100}$$

woraus folgt:

$$\mathbf{P\,R = 71620\,.\,\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 102)$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. 100) entsteht leicht:

$$\mathbf{d = 10\,\sqrt[3]{\frac{365}{t}\,\frac{N}{n}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 103)$$

und für t = 365 (bei Schmiedeeisen):

$$\mathbf{d = 10\,\sqrt[3]{\frac{N}{n}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 104)$$

Lange dünne Wellen (Transmissionswellen) werden unter der Annahme berechnet, daß der Verdrehungswinkel $\varphi$ für ein Meter Länge $^1/_4{}^0$ betragen soll.

Nach Gl. 95) S. 130 ist:

$$\varphi = \frac{t}{E_1}\,\frac{l}{r} = \frac{t}{E_1}\,\frac{2\,l}{d}$$

Setzt man hierin für t den sich aus Gl. 98) ergebenden Wert:

$$t = \frac{16\,\mathfrak{M}}{d^3\,\pi} = \frac{16\,P\,R}{d^3\,\pi}$$

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 4. Aufl., § 5 Gl. 18.

so wird:

$$\varphi = \frac{16\,P\,R}{d^3\,\pi\,E_l}\,\frac{2\,l}{d}$$

Der Winkel $\varphi$ ist hier in Winkeleinheiten ausgedrückt. Die Winkeleinheit ist bekanntlich ein Winkel, dessen Bogen gleich dem Halbmesser ist, und hat, in Graden angegeben, die Größe:

$$\sphericalangle\,1 = \frac{360}{2\,\pi} = 57^\circ\,17'\,44{,}8''$$

Danach ist:

$$\varphi^\circ = \widehat{\varphi}\,\frac{360}{2\,\pi}$$

Setzt man hierin für $\widehat{\varphi}$ den oben gefundenen Wert ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Gl. 102):

$$\varphi^\circ = \frac{360}{2\,\pi}\,\frac{16\,.\,71620\,\frac{N}{n}\,2\,l}{d^3\,\pi\,E_l\,d}$$

woraus sich für die Zahlenwerte:

$$\varphi = {}^1/_4{}^\circ$$
$$l = 100\text{ cm}$$
$$E_l = 0{,}4\,E = 800000$$

durch Auflösung für d der Wert ergibt:

$$\mathbf{d = 12\,\sqrt[4]{\frac{N}{n}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 105)$$

Abgesehen von dieser obigen, schon von Redtenbacher gegebenen Ableitung der Gl. 105), die sich auf die Voraussetzung stützt, daß der Verdrehungswinkel für ein Meter Länge ${}^1/_4{}^\circ$ betragen soll, kann die Gleichung auch abgeleitet werden unter Zugrundelegung einer bei kleineren Wellen kleineren, bei größeren Wellen größeren zulässigen Schubspannung. Mit anderen Worten, man nimmt die Schubspannung verhältnisgleich dem Durchmesser der Welle und setzt:

$$t = C\,d$$

wobei C eine vom Materiale abhängige durch Erfahrung festgesetzte Zahlengröße bedeutet.

Für Schmiedeeisen nimmt man:

$$t = 17{,}6\,d$$

was z. B. bei einer Welle von 20 cm Durchmesser einer Beanspruchung von 352 kg für das Quadratcentimeter gleichkommen würde. (Stärkere Wellen werden nicht mehr nach Gl. 105), sondern nach Gl. 101) bezw. 104) unter Annahme eines bestimmten, unveränderlichen Wertes für t berechnet.)

Aus der Gleichung

$$\varphi^\circ = \widehat{\varphi}\,\frac{360}{2\,\pi} = \frac{t}{E_l}\,\frac{2\,l}{d}\,\frac{360}{2\,\pi}$$

folgt nach der obigen Voraussetzung ($t = C\,d$):

$$\varphi^0 = \frac{C}{E_1}\,\frac{360}{\pi}\,l$$

Der Verdrehungswinkel ist danach unabhängig vom Durchmesser der Welle, wächst aber in geradem Verhältnis mit der Länge derselben.

Aus den Gl. 98) S. 131 und 102) S. 132 folgt:

$$71620\,\frac{N}{n} = \frac{d^3\,\pi}{16}\,t$$

Setzt man hierin: $t = 17{,}6\,d$, so ergibt sich durch Auflösung für d ebenfalls wieder der Wert Gl. 105).

Aufgabe 65. Auf eine schmiedeeiserne Welle wirke eine Kraft $P = 2400$ kg am Hebelarme $R = 50$ cm. Wie groß muß der Durchmesser der Welle genommen werden bei einer Inanspruchnahme von $t = 400$ kg?

Auflösung. Nach G. 100) S. 132 ist zu setzen:

$$d = \sqrt[3]{\frac{5{,}1}{400}} \cdot \sqrt[3]{2400 \cdot 50} = \sim 11{,}5 \text{ cm}$$

Aufgabe 66. Wie groß ist der Verdrehungswinkel der vorigen Welle, wenn diese eine Länge von 15 m hat?

Auflösung. In Gl. 95) S. 130 ist zu setzen:

$$t = 400$$
$$E_1 = 0{,}4 \cdot 2000000 = 800000$$
$$l = 1500$$
$$r = \frac{d}{2} = 5{,}75$$

Es wird dann:

$$\varphi = \frac{400}{800000}\,\frac{1500}{5{,}75} = 0{,}13$$

oder in Graden:

$$\varphi^0 = 0{,}13 \cdot (57^0\,17'\,44{,}8'') = 7^0\,26'\,54{,}4''$$

Aufgabe 67. Es soll der Durchmesser einer schmiedeeisernen Welle berechnet werden, welche eine mechanische Arbeit von 36 Pferdekräften zu übertragen hat und 60 Umdrehungen in der Minute macht.

Nach Gl. 104) ist (bei $t = 365$ kg/qcm):

$$d = 10\sqrt[3]{\frac{36}{60}} = 10\sqrt[3]{0{,}6} = 8{,}4 \text{ cm}$$

Der Verdrehungswinkel dieser Welle beträgt für 1 m Länge nach Gl. 95) S. 130:

$$\varphi = \frac{365}{800000} \cdot \frac{100}{4{,}2} = \frac{1}{92}$$

oder in Graden:

$$\varphi^0 = \frac{57^0\,17'\,44{,}8''}{92} = 37'\,22''$$

Nach Gl. 105) S. 133 würde sich der Durchmesser der Welle ergeben zu:

$$d = 12\sqrt[4]{\frac{36}{60}} = 10{,}6 \text{ cm}$$

## § 16.

# Zusammengesetzte Widerstände.

### 1. Biegung und Zug oder Druck.

Wirken in der Längsrichtung eines prismatischen Stabes vom Querschnitt F zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Zug- oder Druckkräfte P, so entsteht dadurch in dem Stabe eine Zug-, bezw. Druckspannung $k_1$, welche sich gleichförmig über den Querschnitt des Stabes verteilt und die Größe hat:

$$k_1 = \pm \frac{P}{F}$$

Wirken gleichzeitig, rechtwinklig zu der Längsrichtung des Stabes, Kräfte, welche denselben zu verbiegen streben, und ist W das Widerstandsmoment der Querschnittsfläche, M das größte Biegungsmoment, so ist die dadurch bewirkte Biegungsspannung:

$$k_2 = \pm \frac{M}{W}$$

wobei das Zeichen + für Zugspannungen, das Zeichen − für Druckspannungen gelten soll. Die Summe der Spannungen $k_1$ und $k_2$ darf höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme des Materials sein, daher:

$$\left| k = \pm \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W} \right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 106)$$

Ist z. B. der Stab mit seinen beiden Enden frei aufgelagert und durch Gewichte belastet, so bewirken letztere eine Durchbiegung des Stabes; dabei entstehen in den oberen Fasern Druckspannungen, in den unteren Fasern Zugspannungen. Durch Hinzutreten der in der Längsrichtung des Stabes wirkenden Zugkräfte P erleiden die unteren Fasern dann die Gesamt-Zugspannung:

$$k = + \frac{P}{F} + \frac{M}{W}$$

die oberen Fasern die Gesamtspannung:

$$k = + \frac{P}{F} - \frac{M}{W}$$

welche entweder positiv oder negativ, d. h. entweder Zug- oder Druckspannung sein kann, je nachdem das erste oder das zweite Glied der rechten Seite letzter Gleichung das absolut größte ist.

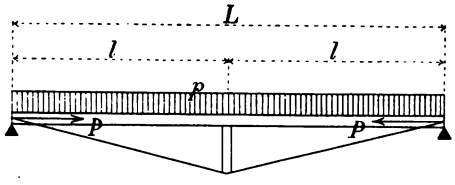
Wirken dagegen in der Richtung der Stabachse die Druckkräfte P, wie z. B. bei dem Balken eines versteiften Trägers (Fig. 111), so sind die oberen Fasern die am schärfsten beanspruchten; sie erleiden die Gesamt-Druckspannung:

$$k = - \frac{P}{F} - \frac{M}{W}$$

Es könnte bei einem solchen Träger, wenn nicht wenigstens zwei derselben in gewisser Entfernung nebeneinander angeordnet und fest miteinander verbunden sind, aber auch eine seitliche Ausbiegung eintreten, und es muß daher bei einem einzelnen versteiften Träger stets noch eine Untersuchung auf Knickfestigkeit durchgeführt werden.

Aufgabe 68. Der Holzbalken eines einfach versteiften Trägers von der Gesamtlänge $L = 2l = 6$ m (Fig. 111) sei gleichmäßig belastet mit $p = 5$ kg für 1 cm Länge. Die in seiner Achsenrichtung wirkende Druckkraft sei $P = 2800$ kg. Wie stark muß der Balken ausgeführt werden?

Fig. 111.




Auflösung. Die Gesamtbelastung einer Balkenhälfte ist:

$$pl = 5 \cdot 300 = 1500 \text{ kg}$$

folglich das größte Biegungsmoment:

$$\mathfrak{M} = pl \cdot \frac{l}{8} = 1500 \cdot \frac{300}{8} = 56250$$

Wählt man den Balken 20 cm hoch, 16 cm breit, so ist der Querschnitt:

$$F = 20 \cdot 16 = 320 \text{ qcm}$$

und das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{16 \cdot 20^2}{6} = 1067$$

Nach Gl. 106) wird dann die größte Druckspannung in der oberen Faserschicht:

$$k = -\frac{2800}{320} - \frac{56250}{1067} = -61{,}5 \text{ kg}$$

Damit der Balken gegen Zerknicken genügend stark ist, muß, wenn die Höhe $h = 20$ cm beibehalten wird, die Breite b etwas verstärkt werden, wie folgende Rechnung ergibt:

Nach Gl. 92) S. 117 ist das erforderliche Trägheitsmoment:

$$J = \frac{5}{4} \frac{PL^2}{E} = \frac{5 \cdot 2800 \cdot 600^2}{4 \cdot 120000} = 10500$$

daher:

$$\frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot b^3}{12} = 10500$$

woraus folgt:

$$b = 18{,}5 \text{ cm}$$

Es wird dann:

$$F = 20 \cdot 18{,}5 = 370 \text{ qcm}$$

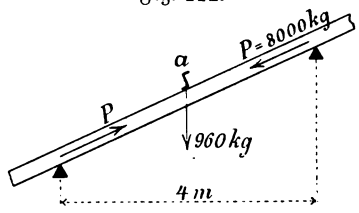
$$W = \frac{18{,}5 \cdot 20^2}{6} = 1233$$

folglich die größte Druckspannung:

$$k = -\frac{2800}{370} - \frac{56250}{1233} = -53 \text{ kg}$$

Aufgabe 69. Auf die obere aus zwei ⊏-Eisen bestehende Gurtung eines Dachbinders wirke in der Achsenrichtung die Druckkraft P = 8000 kg. Außerdem soll die Gurtung, deren Grundrißlänge 4 m sei, durch die in der Mitte befindliche Pfette a (Fig. 112) eine lotrechte Belastung von 960 kg erhalten. Welche Eisen sind zu wählen, wenn die Gesamtbeanspruchung k höchstens 800 kg betragen soll?

Fig. 112.




Auflösung. Das größte Biegungsmoment ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{960 \cdot 400}{4} = 96000$$

Ist F die Querschnittsfläche, W das Widerstandsmoment eines ⊏-Eisens, so ist, da die Gurtung aus zwei ⊏-Eisen besteht, die größte Druckbeanspruchung nach Gl. 106) S. 135:

$$k = -\frac{8000}{2F} - \frac{96000}{2W}$$

Man verfährt nun zweckmäßig so, daß man aus den Profiltabellen probeweise ein Profil herausucht, die Größen F und W dieses Profils in die letzte Gleichung einsetzt, und k danach berechnet. Erhält man danach für k einen zu großen Wert, so hat man ein stärkeres Profil zu wählen.

Nach Tabelle 1 § 6 S. 28 ist für Profil Nr. 14:

$$F = 20{,}4$$
$$W = 86{,}4$$

folglich:

$$k = \frac{8000}{2 \cdot 20{,}4} + \frac{96000}{2 \cdot 86{,}4} = 751 \text{ kg}$$

Das nächst kleinere Profil Nr. 12 würde eine Beanspruchung von über 1000 kg ergeben; das ⊏-Eisen Nr. 14 ist daher beizubehalten.

## 2. Biegung und Verdrehung.

Wirken auf einen prismatischen geraden Stab Kräfte, welche denselben um seine Längsachse zu verdrehen streben, und zugleich Kräfte, welche rechtwinklig zur Stabachse gerichtet sind, also eine Biegung hervorrufen, so treten in dem Stabe infolge der Verdrehung Schubspannungen und zugleich infolge der Biegung Zug-

oder Druckspannungen auf, welche sich in jedem einzelnen Punkte zu einer Gesamtspannung vereinigen lassen.

Die Abmessungen des Stabes sind so zu bestimmen, daß die größte Gesamtspannung höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme des Materiales wird.

Wird für irgend einen Querschnitt des Stabes das durch die rechtwinklig zur Stabachse gerichteten Kräfte hervorgerufene Biegungsmoment mit $\mathfrak{M}_B$, die dabei auftretende größte Zug- bezw. Druckspannung mit s, ferner das auf Verdrehung wirkende Moment (das Torsionsmoment) mit $\mathfrak{M}_T$, die dabei auftretende größte Schubspannung mit t bezeichnet, so hat man zur Bestimmung der Gesamtspannung die Gleichung*):

$$k = \frac{3}{8}\, s + \frac{5}{8}\sqrt{s^2 + 4t^2} \quad \ldots\ldots \quad 107)$$

Für den kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d, dem Widerstandsmoment W und dem polaren Trägheitsmoment $J_c$ bestehen für s bezw. t die Bedingungsgleichungen:

$$s = \frac{\mathfrak{M}_B}{W} = \frac{32\,\mathfrak{M}_B}{d^3\pi} \quad \ldots\ldots \quad 108)$$

$$t = \frac{\mathfrak{M}_T \cdot d}{2\,J_c} = \frac{16\,\mathfrak{M}_T}{d^3\pi} \quad \ldots\ldots \quad 109)$$

Durch Einsetzung dieser Werte in Gl. 107) folgt:

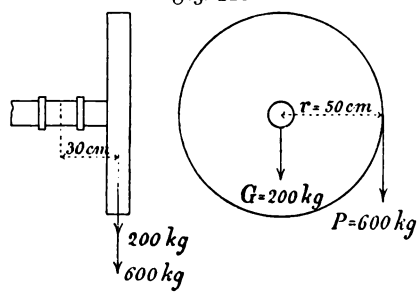
$$k = \frac{32}{d^3\pi}\left(\frac{3}{8}\,\mathfrak{M}_B + \frac{5}{8}\sqrt{\mathfrak{M}_B^2 + \mathfrak{M}_T^2}\right) \quad \ldots \quad 110)$$

oder:

$$d^3 = \frac{4}{k\pi}\left(3\,\mathfrak{M}_B + 5\sqrt{\mathfrak{M}_B^2 + \mathfrak{M}_T^2}\right) \quad \ldots \quad 111)$$

Nach Gl. 111) läßt sich z. B. der Durchmesser d einer durch Zahnräder, Riemenscheiben u. s. w. belasteten und auf Verdrehung beanspruchten Welle berechnen.

Fig. 113.




Aufgabe 70. Es soll der Durchmesser d einer schmiedeeisernen Welle berechnet werden, welche nach Fig. 113 durch ein Zahnrad, dessen Eigengewicht G = 200 kg ist und welches einen Zahndruck von P = 600 kg überträgt, belastet ist.

*) Vergl. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, S. 215 u. 216.

Auflösung. Für den durch die Mitte des Lagers gelegten Querschnitt ist das Biegungsmoment:

$$\mathfrak{M}_B = (600 + 200)\,30 = 24000$$

Das Verdrehungsmoment hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_T = 600 \cdot 50 = 30000$$

Bei $k = 500$ erhält man dann nach Gl. 111):

$$d^3 = \frac{4}{500 \cdot 3{,}14}\left(3 \cdot 24000 + 5\sqrt{24000^2 + 30000^2}\right)$$

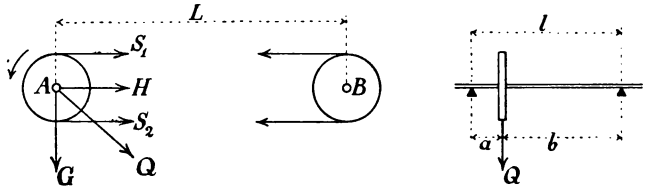
woraus folgt:

$$d = 8{,}8 \text{ cm}$$

Aufgabe 71. Von einer Welle A, die $n = 100$ Umdrehungen in der Minute macht, sollen auf eine andere in $L = 16$ m Entfernung und in gleicher Höhe befindliche parallele Welle B mittels Hanfseilbetrieb $N = 60$ Pferdekräfte übertragen werden. Länge der Welle A zwischen den Lagern: $l = 4$ m; Abstand der Seilscheibe vom linken Lager: $a = 0{,}8$ m; vom rechten Lager: $b = 3{,}2$ m (Fig. 114).

Die Welle A, welche zugleich auf Biegung und auf Verdrehung in Anspruch genommen wird, ist zu berechnen.

Fig. 114.




Auflösung. Der bei Hanfseilbetrieb übliche Seildurchmesser ist:

$$d = 4{,}5 \text{ cm}$$

Diesem entspricht der Seilquerschnitt:

$$\frac{d^2\pi}{4} = 15{,}9 = \sim 16 \text{ qcm}$$

Gewicht des Seiles für 1 m Länge:

$$q = 1{,}5 \text{ kg}$$

Der Halbmesser der Seilscheibe wird angenommen zu:

$$R = 20\,d = 20 \cdot 4{,}5 = 90 \text{ cm}$$

Nach Gl. 102) S. 132 ist der zu übertragende Widerstand:

$$P = 71620 \cdot \frac{1}{90} \cdot \frac{60}{100} = 477{,}5 = \sim 480 \text{ kg}$$

Die erforderlichen Seilspannungen sind:*)

$$S_1 = \frac{5}{3}\,P = \frac{5}{3} \cdot 480 = 800 \text{ kg}$$

$$S_2 = \frac{2}{3}\,P = \frac{2}{3} \cdot 480 = 320 \text{ kg}$$

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 4. Aufl. Gl. 161) S. 116.

Rechnet man für die zulässige Inanspruchnahme der Seile rund $k = 8$ kg/qcm, so ergibt sich die Anzahl der anzuordnenden Seile zu:

$$z = \frac{S_1}{k \cdot \frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{800}{8 \cdot 16} = \sim 6$$

Das auf die Scheibe kommende Seilgewicht ist:

$$G_1 = z\, A\, q = 6 \cdot 16 \cdot 1{,}5 = 144 \text{ kg}$$

Das Eigengewicht der Scheibe beträgt (nach praktischen Ausführungen des Eisenwerkes Wülfel vor Hannover):

$$G_2 = 800 \text{ kg}$$

zusammen:

$$G = G_1 + G_2 = 944 \text{ kg}$$

Die auf die Welle A wirkende Horizontalkraft besteht aus der Summe der Seilspannungen und ist danach:

$$H = 800 + 320 = 1120 \text{ kg}$$

Aus G und H ergibt sich die Mittelkraft:

$$Q = \sqrt{944^2 + 1120^2} = 1465 \text{ kg}$$

mithin ist das Biegungsmoment:

$$\mathfrak{M}_B = \frac{Q\, a\, b}{l} = \frac{1465 \cdot 80 \cdot 320}{400} = 93760 \text{ kgcm}$$

und das Torsionsmoment:

$$\mathfrak{M}_T = P\, R = 480 \cdot 90 = 43200 \text{ kgcm}$$

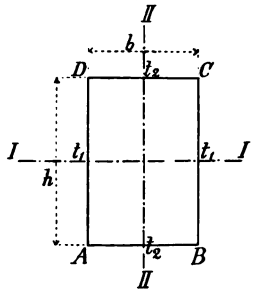
Für $k = 400$ kg/qcm und $\frac{32}{\pi} = \sim 10$ wird dann nach Gl. 110) S. 138 der auszuführende Wellendurchmesser:

$$d^3 = \frac{10}{400}\left(\frac{3}{8} \cdot 93760 + \frac{5}{8}\sqrt{93760^2 + 43200^2}\right) = 2492$$

$$d = \sqrt[3]{2492} = 13{,}6 \text{ cm}$$

Bei dem rechteckigen Querschnitt (Fig. 115) ist die Schubspannung in den vier Ecken = Null. Die größten Schubspannungen treten auf in den Mitten der Umfangsseiten und sind*):

Fig. 115.




$$t_1 = \frac{3}{8}\,\frac{\mathfrak{M}_T \cdot b}{J_{II}} \quad \ldots \quad 112)$$

$$t_2 = \frac{3}{8}\,\frac{\mathfrak{M}_T \cdot h}{J_I} \quad \ldots \quad 113)$$

Ist $h > b$, so wird $J_{II} < J_I$, folglich $t_1 > t_2$, d. h. die stärkste überhaupt vorkommende Schubspannung erleiden diejenigen Punkte des Umfangs, deren Entfernung von der Stabachse am geringsten ist.

Für die Drehungsfestigkeit des rechteckigen Querschnittes ist daher stets das kleinste Trägheitsmoment maßgebend.

*) Vergl. Reck, Vorträge über Mechanik, T. II S. 69.

Setzt man $J_I = \frac{b\,h^3}{12}$ und $J_{II} = \frac{h\,b^3}{12}$ in die letzten Gleichungen ein, so entsteht:

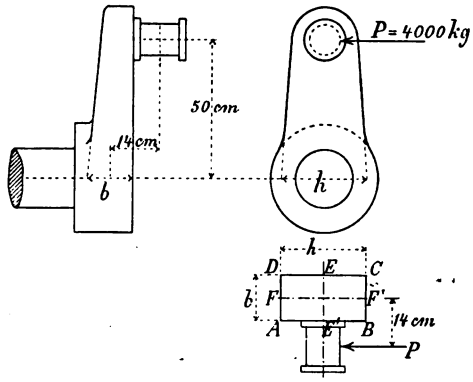
$$t_1 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{h\,b^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 114)$$

$$t_2 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{b\,h^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 115)$$

Aufgabe 72. Es sollen die Abmessungen h und b der in Fig. 116 abgebildeten, mit P = 4000 kg belasteten Kurbel von rechteckigem Querschnitt berechnet werden, unter der Annahme, daß $b = \frac{1}{2}\,h$ ist.

Da hier die Biegungsebene ($\mathfrak{M}_B$ = Ebene) parallel zu den Kanten A B bezw. C D gerichtet ist, so bildet E E' die neutrale Achse und die größte Biegungsspannung s ent-

Fig. 116.




steht in den Kanten A D und B C. Die größten Schubspannungen $t_1$ und $t_2$ treten auf in den Punkten E und E' bezw. F und F', die größte Gesamtspannung überhaupt in den Mitten der Seiten A D und B C, für welche:

$$s = \frac{\mathfrak{M}_B}{W} = \frac{6\,\mathfrak{M}_B}{b\,h^2}$$

und:

$$t_2 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{b\,h^2}$$

Nun ist:

$$\mathfrak{M}_B = 4000 \,.\, 50 = 200000 \text{ kg cm} = 200 \text{ t cm}$$

$$\mathfrak{M}_T = 4000 \,.\, 14 = 56000 \text{ kg cm} = 56 \text{ t cm}$$

folglich für $b = \frac{1}{2}\,h$:

$$s = \frac{6 \,.\, 200}{\frac{1}{2}\,h^3} = \frac{2400}{h^3}$$

$$t_2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{56}{\frac{1}{2}\,h^3} = \frac{504}{h^3}$$

für $k = 500$ kg qcm $= 0{,}5$ t qcm wird somit nach Gl. 107):

$$0{,}5 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2400}{h^3} + \frac{5}{8} \sqrt{\left(\frac{2400}{h^3}\right)^2 + 4\left(\frac{504}{h^3}\right)^2}$$

$$0{,}5 = \frac{1}{8h^3}\left(7200 + 5\sqrt{(2400)^2 + 4\,(504)^2}\right) = \frac{20215}{8\,h^3}$$

oder:

$$h = \sqrt[3]{5054} = 17{,}2 \text{ cm}$$

folglich:

$$b = {}^1/_2\, h = 8{,}6 \text{ cm}$$

Die Schubspannung in der Mitte der Seiten AB bezw. CD wird nach Gl. 114):

$$t_1 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{h\,b^2} = \frac{9}{2}\,\frac{56}{17{,}2 \cdot 8{,}6^2} = 0{,}2 \text{ t/qcm} = 200 \text{ kg/qcm}$$

## § 17.

# Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

### Widerstand gegen Zug oder Druck.

$$P = F k \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)\ \text{S. } 6$$

Dehnung = $$\lambda = \frac{P\,l}{F\,E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)\ \text{S. } 6$$

### Widerstand gegen Biegung.

Trägheitsmom. $$J = \Sigma\,(f\,y^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)\ \text{S. } 14$$

Widerstandsm. $$W = \frac{J}{e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)\ \text{S. } 17$$

Bieg. mom. $$\mathfrak{M} = k\,W \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17)\ \text{S. } 18$$

### Trägheitsmomente und Widerstandsmomente.

Tabelle für die wichtigsten einfachen Querschnitte S. 26 und 27.

In Bezug auf eine der Schwerachse parallele andere Achse (Abstand a) ist:

$$J_0 = J_s + F\,a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 20)\ \text{S. } 20$$

Annäherungsformel für genietete Träger:

$$W = h_0\,(F + {}^1/_6\,F_1) \quad \ldots\ldots \quad 27)\ \text{S. } 25$$

### Krümmung und Durchbiegung belasteter Balken.

Krümmungshalbmesser: $$\varrho = \frac{E\,J}{\mathfrak{M}} \quad \ldots\ldots \quad 29)\ \text{S. } 42$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{E\,J} \cdot (\mathfrak{M}\text{-Fläche}) \quad \ldots\ldots \quad 32)\ \text{S. } 43$$

$$f = \frac{1}{E\,J} \cdot (\text{Moment der } \mathfrak{M}\text{-Fläche}) \quad \ldots \quad 34)\ \text{S. } 44$$

### Der an einem Ende eingespannte Träger.

Belastung durch Einzelkraft P.

$$P\,l = k\,W \quad \ldots\ldots\ldots \quad 35)\ \text{S. } 45$$

$$f = \frac{P\,l^3}{3\,E\,J} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 36)\ \text{S. } 46$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P\,l^2}{2\,E\,J} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 38)\ \text{S. } 46$$

Streckenbelastung.

$$p\,l \cdot \frac{l}{2} = k\,W \quad \ldots\ldots\ldots \quad 39)\ \text{S. } 47$$

$$f = \frac{p\,l^4}{8\,E\,J} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 40)\ \text{S. } 48$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p\,l^3}{6\,E\,J} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 42)\ \text{S. } 49$$

### Der Träger auf zwei Stützen.

Belastung durch Einzelkraft P.

$$A = \frac{P\,b}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 45)\ \text{S. } 58$$

$$B = \frac{P\,a}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 46)\ \text{S. } 58$$

$$P\,\frac{a\,b}{l} = k\,W \quad \ldots\ldots\ldots \quad 47)\ \text{S. } 59$$

Für $a = b = {}^1/_2\,l$ wird:

$$\frac{P\,l}{4} = k\,W \quad \ldots\ldots\ldots \quad 48)\ \text{S. } 60$$

$$f = \frac{1}{12}\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 49)\ \text{S. } 60$$

Streckenbelastung.

$$A = B = \frac{p\,l}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 51)\ \text{S. } 66$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{2}\,x\,(l - x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 52)\ \text{S. } 66$$

$$\mathfrak{M}_{max} = p\,l \cdot \frac{l}{8} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 53)\ \text{S. } 67$$

$$p\,l \cdot \frac{l}{8} = k\,W \quad \ldots\ldots\ldots \quad 54)\ \text{S. } 68$$

$$f = \frac{5}{48}\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 55)\ \text{S. } 69$$

### Der Träger auf drei Stützen.

Streckenbelastung bei gleichen Spannweiten.

$$A = B = \frac{3}{8} p l \quad \ldots\ldots \quad 64) \text{ S. } 89$$

$$C = \frac{10}{8} p l = \frac{5}{8} \cdot 2 p l \quad \ldots\ldots \quad 65) \text{ S. } 89$$

$$\frac{p l^2}{8} = k W \quad \ldots\ldots \quad 66) \text{ S. } 90$$

### Die Träger von gleichem Biegungswiderstande.

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} = \frac{W_x}{W} \quad \ldots\ldots \quad 70) \text{ S. } 100$$

Für kreisförmigen Querschnitt wird:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}}} \quad \ldots\ldots \quad 71) \text{ S. } 100$$

und für eingespannten Träger von der Länge l, am freien Ende durch P belastet:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots \quad 72) \text{ S. } 100$$

Für Rechteckquerschnitt mit unveränderlicher Höhe h (eingespannter Träger, am freien Ende durch P belastet) wird:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{l} \quad \ldots\ldots \quad 73) \text{ S. } 101$$

$$h = \frac{k}{E} \frac{l^2}{f} \quad \ldots\ldots \quad 76) \text{ S. } 102$$

$$b = \frac{6 P l}{k h^2} \quad \ldots\ldots \quad 77) \text{ S. } 102$$

### Die auf Doppelbiegung beanspruchten Träger.

$$W_x = \frac{\mathfrak{M}_1 + c \mathfrak{M}_2}{k} \quad \ldots\ldots \quad 79) \text{ S. } 106$$

wobei $c = W_x : W_y$.

Für Rechteckquerschnitt ist $c = h : b$ und:

$$h^3 = \frac{6 c}{k} (\mathfrak{M}_1 + c \mathfrak{M}_2) \quad \ldots\ldots \quad 80) \text{ S. } 108$$

### Widerstand gegen Abscherung.

$$P = F \cdot t \quad \ldots\ldots \quad 81) \text{ S. } 111$$

$$t = \frac{4}{5} k \quad \ldots\ldots \quad 82) \text{ S. } 111$$

### Widerstand gegen Zerknicken.

$$P = \frac{c}{n} \frac{\pi^2}{l^2} E J \quad \ldots \ldots \quad 89) \text{ S. } 116$$

Sind beide Stabenden frei (nicht eingespannt) und in der ursprünglichen Achse geführt, so wird:

$$P = \frac{2 E J}{l^2} \text{ für Schmiedeeisen} \ldots \quad 90) \text{ S. } 117$$

$$P = \frac{4}{3} \frac{E J}{l^2} \text{ für Gußeisen} \ldots \quad 91) \text{ S. } 117$$

$$P = \frac{4}{5} \frac{E J}{l^2} \text{ für Holz und Stein} \ldots \quad 92) \text{ S. } 117$$

Bei zusammengesetzten Querschnitten sind die einzelnen Eisen zu verbinden in Abständen:

$$l_1 = \sqrt{\frac{z}{P} 2 E i} \quad \ldots \ldots \quad 93) \text{ S. } 117$$

Für Ringquerschnitt ist angenähert das Trägheitsmoment:

$$J = 0{,}4 D_1^3 \delta \quad \ldots \ldots \quad 94) \text{ S. } 119$$

### Widerstand gegen Verdrehung.

$$\varphi = \frac{t}{E_1} \frac{l}{r} \quad \ldots \ldots \quad 95) \text{ S. } 130$$

$$E_1 = 0{,}4 \cdot E \quad \ldots \ldots \quad 96) \text{ S. } 131$$

$$\mathfrak{M} = t \frac{J_c}{r} \quad \ldots \ldots \quad 97) \text{ S. } 131$$

Für Kreisquerschnitt wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{d^3 \pi}{16} t \quad \ldots \ldots \quad 98) \text{ S. } 131$$

Daraus für $\mathfrak{M} = P R$:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi t}} \sqrt[3]{P R} \quad \ldots \ldots \quad 99) \text{ S. } 132$$

und wenn:

$$P R = 71620 \frac{N}{n} \quad \ldots \ldots \quad 102) \text{ S. } 132$$

gesetzt wird:

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{365}{t} \frac{N}{n}} \quad \ldots \ldots \quad 103) \text{ S. } 132$$

Für $t = 365$ entsteht:

$$d = 0{,}24 \sqrt[3]{P R} \quad \ldots \ldots \quad 101) \text{ S. } 132$$

oder:

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots \ldots \quad 104) \text{ S. } 132$$

Lange dünne Wellen (Transmissionswellen) werden berechnet nach:

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \ldots \ldots \quad 105) \text{ S. } 133$$

## Zusammengesetzte Widerstände.

### Biegung und Zug oder Druck.

$$k = \frac{P}{F} + \frac{\mathfrak{M}}{W} \quad \ldots \ldots \quad 106) \text{ S. } 135$$

### Biegung und Verdrehung.

$$k = \frac{3}{8} s + \frac{5}{8} \sqrt{s^2 + 4 t^2} \quad \ldots \quad 107) \text{ S. } 138$$

Für kreisförmigen Querschnitt wird:

$$k = \frac{32}{d^3 \pi} \left( \frac{3}{8} \mathfrak{M}_B + \frac{5}{8} \sqrt{\mathfrak{M}_B^2 + \mathfrak{M}_T^2} \right) \quad 110) \text{ S. } 138$$

# Anhang.

## 1) Tabelle

der

Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte
der Zahlen 1,0 bis 100,0.

0—5

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2 \pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,00 | 0,000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,000000 |
| 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,31623 | 0,46416 | 0,31416 | 0,007854 |
| 0,2 | 0,04 | 0,008 | 0,44721 | 0,58480 | 0,62832 | 0,031416 |
| 0,3 | 0,09 | 0,027 | 0,54772 | 0,66943 | 0,94248 | 0,070686 |
| 0,4 | 0,16 | 0,064 | 0,63246 | 0,73681 | 1,2566 | 0,125664 |
| 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0,70711 | 0,79370 | 1,5708 | 0,196350 |
| 0,6 | 0,36 | 0,216 | 0,77460 | 0,84343 | 1,8850 | 0,282743 |
| 0,7 | 0,49 | 0,343 | 0,83666 | 0,88790 | 2,1991 | 0,384845 |
| 0,8 | 0,64 | 0,512 | 0,89443 | 0,92832 | 2,5133 | 0,502655 |
| 0,9 | 0,81 | 0,729 | 0,94868 | 0,96549 | 2,8274 | 0,636173 |
| **1,0** | 1,00 | 1,000 | 1,0000 | 1,0000 | 3,1416 | 0,78540 |
| 1,1 | 1,21 | 1,331 | 1,0488 | 1,0323 | 3,4558 | 0,95033 |
| 1,2 | 1,44 | 1,728 | 1,0954 | 1,0627 | 3,7699 | 1,13097 |
| 1,3 | 1,69 | 2,197 | 1,1402 | 1,0914 | 4,0841 | 1,32732 |
| 1,4 | 1,96 | 2,744 | 1,1832 | 1,1187 | 4,3982 | 1,53938 |
| 1,5 | 2,25 | 3,375 | 1,2247 | 1,1447 | 4,7124 | 1,76715 |
| 1,6 | 2,56 | 4,096 | 1,2649 | 1,1696 | 5,0265 | 2,01062 |
| 1,7 | 2,89 | 4,913 | 1,3038 | 1,1935 | 5,3407 | 2,26980 |
| 1,8 | 3,24 | 5,832 | 1,3416 | 1,2164 | 5,6549 | 2,54469 |
| 1,9 | 3,61 | 6,859 | 1,3784 | 1,2386 | 5,9690 | 2,83529 |
| **2,0** | 4,00 | 8,000 | 1,4142 | 1,2599 | 6,2832 | 3,14159 |
| 2,1 | 4,41 | 9,261 | 1,4491 | 1,2806 | 6,5973 | 3,46361 |
| 2,2 | 4,84 | 10,648 | 1,4832 | 1,3006 | 6,9115 | 3,80133 |
| 2,3 | 5,29 | 12,167 | 1,5166 | 1,3200 | 7,2257 | 4,15476 |
| 2,4 | 5,76 | 13,824 | 1,5492 | 1,3389 | 7,5398 | 4,52389 |
| 2,5 | 6,25 | 15,625 | 1,5811 | 1,3572 | 7,8540 | 4,90874 |
| 2,6 | 6,76 | 17,576 | 1,6125 | 1,3751 | 8,1681 | 5,30929 |
| 2,7 | 7,29 | 19,683 | 1,6432 | 1,3925 | 8,4823 | 5,72555 |
| 2,8 | 7,84 | 21,952 | 1,6733 | 1,4095 | 8,7965 | 6,15752 |
| 2,9 | 8,41 | 24,389 | 1,7029 | 1,4260 | 9,1106 | 6,60520 |
| **3,0** | 9,00 | 27,000 | 1,7321 | 1,4422 | 9,4248 | 7,06858 |
| 3,1 | 9,61 | 29,791 | 1,7607 | 1,4581 | 9,7389 | 7,54768 |
| 3,2 | 10,24 | 32,768 | 1,7889 | 1,4736 | 10,053 | 8,04248 |
| 3,3 | 10,89 | 35,937 | 1,8166 | 1,4888 | 10,367 | 8,55299 |
| 3,4 | 11,56 | 39,304 | 1,8439 | 1,5037 | 10,681 | 9,07920 |
| 3,5 | 12,25 | 42,875 | 1,8708 | 1,5183 | 10,996 | 9,62113 |
| 3,6 | 12,96 | 46,656 | 1,8974 | 1,5326 | 11,310 | 10,1788 |
| 3,7 | 13,69 | 50,653 | 1,9235 | 1,5467 | 11,624 | 10,7521 |
| 3,8 | 14,44 | 54,872 | 1,9494 | 1,5605 | 11,938 | 11,3411 |
| 3,9 | 15,21 | 59,319 | 1,9748 | 1,5741 | 12,252 | 11,9459 |
| **4,0** | 16,00 | 64,000 | 2,0000 | 1,5874 | 12,566 | 12,5664 |
| 4,1 | 16,81 | 68,921 | 2,0248 | 1,6005 | 12,881 | 13,2025 |
| 4,2 | 17,64 | 74,088 | 2,0494 | 1,6134 | 13,195 | 13,8544 |
| 4,3 | 18,49 | 79,507 | 2,0736 | 1,6261 | 13,509 | 14,5220 |
| 4,4 | 19,36 | 85,184 | 2,0976 | 1,6386 | 13,823 | 15,2053 |
| 4,5 | 20,25 | 91,125 | 2,1213 | 1,6510 | 14,137 | 15,9043 |
| 4,6 | 21,16 | 97,336 | 2,1448 | 1,6631 | 14,451 | 16,6190 |
| 4,7 | 22,09 | 103,823 | 2,1679 | 1,6751 | 14,765 | 17,3494 |
| 4,8 | 23,04 | 110,592 | 2,1909 | 1,6869 | 15,080 | 18,0956 |
| 4,9 | 24,01 | 117,649 | 2,2136 | 1,6985 | 15,394 | 18,8574 |
| **5,0** | 25,00 | 125,000 | 2,2361 | 1,7100 | 15,708 | 19,6350 |

5—10

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2 \pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **5,0** | 25,00 | 125,000 | 2,2361 | 1,7100 | 15,708 | 19,6350 |
| 5,1 | 26,01 | 132,651 | 2,2583 | 1,7213 | 16,022 | 20,4282 |
| 5,2 | 27,04 | 140,608 | 2,2804 | 1,7325 | 16,336 | 21,2372 |
| 5,3 | 28,09 | 148,877 | 2,3022 | 1,7435 | 16,650 | 22,0618 |
| 5,4 | 29,16 | 157,464 | 2,3238 | 1,7544 | 16,965 | 22,9022 |
| 5,5 | 30,25 | 166,375 | 2,3452 | 1,7652 | 17,279 | 23,7583 |
| 5,6 | 31,36 | 175,616 | 2,3664 | 1,7758 | 17,593 | 24,6301 |
| 5,7 | 32,49 | 185,193 | 2,3875 | 1,7863 | 17,907 | 25,5176 |
| 5,8 | 33,64 | 195,112 | 2,4083 | 1,7967 | 18,221 | 26,4208 |
| 5,9 | 34,81 | 205,379 | 2,4290 | 1,8070 | 18,535 | 27,3397 |
| **6,0** | 36,00 | 216,000 | 2,4495 | 1,8171 | 18,850 | 28,2743 |
| 6,1 | 37,21 | 226,981 | 2,4698 | 1,8272 | 19,164 | 29,2247 |
| 6,2 | 38,44 | 238,328 | 2,4900 | 1,8371 | 19,478 | 30,1907 |
| 6,3 | 39,69 | 250,047 | 2,5100 | 1,8469 | 19,792 | 31,1725 |
| 6,4 | 40,96 | 262,144 | 2,5298 | 1,8566 | 20,106 | 32,1699 |
| 6,5 | 42,25 | 274,625 | 2,5495 | 1,8663 | 20,420 | 33,1831 |
| 6,6 | 43,56 | 287,496 | 2,5690 | 1,8758 | 20,735 | 34,2119 |
| 6,7 | 44,89 | 300,763 | 2,5884 | 1,8852 | 21,049 | 35,2565 |
| 6,8 | 46,24 | 314,432 | 2,6077 | 1,8945 | 21,363 | 36,3168 |
| 6,9 | 47,61 | 328,509 | 2,6268 | 1,9038 | 21,677 | 37,3928 |
| **7,0** | 49,00 | 343,000 | 2,6458 | 1,9129 | 21,991 | 38,4845 |
| 7,1 | 50,41 | 357,911 | 2,6646 | 1,9220 | 22,305 | 39,5919 |
| 7,2 | 51,84 | 373,248 | 2,6833 | 1,9310 | 22,619 | 40,7150 |
| 7,3 | 53,29 | 389,017 | 2,7019 | 1,9399 | 22,934 | 41,8539 |
| 7,4 | 54,76 | 405,224 | 2,7203 | 1,9487 | 23,248 | 43,0084 |
| 7,5 | 56,25 | 421,875 | 2,7386 | 1,9574 | 23,562 | 44,1786 |
| 7,6 | 57,76 | 438,976 | 2,7568 | 1,9661 | 23,876 | 45,3646 |
| 7,7 | 59,29 | 456,533 | 2,7749 | 1,9747 | 24,190 | 46,5663 |
| 7,8 | 60,84 | 474,552 | 2,7928 | 1,9832 | 24,504 | 47,7836 |
| 7,9 | 62,41 | 493,039 | 2,8107 | 1,9916 | 24,819 | 49,0167 |
| **8,0** | 64,00 | 512,000 | 2,8284 | 2,0000 | 25,133 | 50,2655 |
| 8,1 | 65,61 | 531,441 | 2,8461 | 2,0083 | 25,447 | 51,5300 |
| 8,2 | 67,24 | 551,368 | 2,8636 | 2,0165 | 25,761 | 52,8102 |
| 8,3 | 68,89 | 571,787 | 2,8810 | 2,0247 | 26,075 | 54,1061 |
| 8,4 | 70,56 | 592,704 | 2,8983 | 2,0328 | 26,389 | 55,4177 |
| 8,5 | 72,25 | 614,125 | 2,9155 | 2,0408 | 26,704 | 56,7450 |
| 8,6 | 73,96 | 636,056 | 2,9326 | 2,0488 | 27,018 | 58,0880 |
| 8,7 | 75,69 | 658,503 | 2,9496 | 2,0567 | 27,332 | 59,4468 |
| 8,8 | 77,44 | 681,472 | 2,9665 | 2,0646 | 27,646 | 60,8212 |
| 8,9 | 79,21 | 704,969 | 2,9833 | 2,0724 | 27,960 | 62,2114 |
| **9,0** | 81,00 | 729,000 | 3,0000 | 2,0801 | 28,274 | 63,6173 |
| 9,1 | 82,81 | 753,571 | 3,0166 | 2,0878 | 28,588 | 65,0388 |
| 9,2 | 84,64 | 778,688 | 3,0332 | 2,0954 | 28,903 | 66,4761 |
| 9,3 | 86,49 | 804,357 | 3,0496 | 2,1029 | 29,217 | 67,9291 |
| 9,4 | 88,36 | 830,584 | 3,0659 | 2,1105 | 29,531 | 69,3978 |
| 9,5 | 90,25 | 857,375 | 3,0822 | 2,1179 | 29,845 | 70,8822 |
| 9,6 | 92,16 | 884,736 | 3,0984 | 2,1253 | 30,159 | 72,3823 |
| 9,7 | 94,09 | 912,673 | 3,1145 | 2,1327 | 30,473 | 73,8981 |
| 9,8 | 96,04 | 941,192 | 3,1305 | 2,1400 | 30,788 | 75,4296 |
| 9,9 | 98,01 | 970,299 | 3,1464 | 2,1472 | 31,102 | 76,9769 |
| **10,0** | 100,00 | 1000,000 | 3,1623 | 2,1544 | 31,416 | 78,5398 |

10—15

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2 \pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **10,0** | 100,00 | 1000,000 | 3,1623 | 2,1544 | 31,416 | 78,5398 |
| 10,1 | 102,01 | 1030,301 | 3,1780 | 2,1616 | 31,730 | 80,1185 |
| 10,2 | 104,04 | 1061,208 | 3,1937 | 2,1687 | 32,044 | 81,7128 |
| 10,3 | 106,09 | 1092,727 | 3,2094 | 2,1757 | 32,358 | 83,3229 |
| 10,4 | 108,16 | 1124,864 | 3,2249 | 2,1828 | 32,673 | 84,9487 |
| 10,5 | 110,25 | 1157,625 | 3,2404 | 2,1898 | 32,987 | 86,5901 |
| 10,6 | 112,36 | 1191,016 | 3,2558 | 2,1967 | 33,301 | 88,2473 |
| 10,7 | 114,49 | 1225,043 | 3,2711 | 2,2036 | 33,615 | 89,9202 |
| 10,8 | 116,64 | 1259,712 | 3,2863 | 2,2104 | 33,929 | 91,6088 |
| 10,9 | 118,61 | 1295,029 | 3,3015 | 2,2172 | 34,243 | 93,3132 |
| **11,0** | 121,00 | 1331,000 | 3,3166 | 2,2239 | 34,558 | 95,0332 |
| 11,1 | 123,21 | 1367,631 | 3,3317 | 2,2307 | 34,872 | 96,7689 |
| 11,2 | 125,44 | 1404,928 | 3,3466 | 2,2374 | 35,186 | 98,5203 |
| 11,3 | 127,69 | 1442,897 | 3,3615 | 2,2441 | 35,500 | 100,287 |
| 11,4 | 129,96 | 1481,544 | 3,3764 | 2,2506 | 35,814 | 102,070 |
| 11,5 | 132,25 | 1520,875 | 3,3912 | 2,2572 | 36,128 | 103,869 |
| 11,6 | 134,56 | 1560,896 | 3,4059 | 2,2637 | 36,442 | 105,683 |
| 11,7 | 136,89 | 1601,613 | 3,4205 | 2,2702 | 36,757 | 107,513 |
| 11,8 | 139,24 | 1643,032 | 3,4351 | 2,2766 | 37,071 | 109,359 |
| 11,9 | 141,61 | 1685,159 | 3,4496 | 2,2831 | 37,385 | 111,220 |
| **12,0** | 144,00 | 1728,000 | 3,4641 | 2,2894 | 37,699 | 113,097 |
| 12,1 | 146,41 | 1771,561 | 3,4785 | 2,2957 | 38,013 | 114,990 |
| 12,2 | 148,84 | 1815,848 | 3,4928 | 2,3021 | 38,327 | 116,899 |
| 12,3 | 151,29 | 1860,867 | 3,5071 | 2,3084 | 38,642 | 118,823 |
| 12,4 | 153,76 | 1906,624 | 3,5214 | 2,3146 | 38,956 | 120,763 |
| 12,5 | 156,25 | 1953,125 | 3,5355 | 2,3208 | 39,270 | 122,718 |
| 12,6 | 158,76 | 2000,376 | 3,5496 | 2,3270 | 39,584 | 124,690 |
| 12,7 | 161,29 | 2048,383 | 3,5637 | 2,3331 | 39,898 | 126,677 |
| 12,8 | 163,84 | 2097,152 | 3,5777 | 2,3392 | 40,212 | 128,680 |
| 12,9 | 166,41 | 2146,689 | 3,5917 | 2,3453 | 40,527 | 130,698 |
| **13,0** | 169,00 | 2197,000 | 3,6056 | 2,3513 | 40,841 | 132,732 |
| 13,1 | 171,61 | 2248,091 | 3,6194 | 2,3573 | 41,155 | 134,782 |
| 13,2 | 174,24 | 2299,968 | 3,6332 | 2,3633 | 41,469 | 136,848 |
| 13,3 | 176,89 | 2352,637 | 3,6469 | 2,3693 | 41,783 | 138,929 |
| 13,4 | 179,56 | 2406,104 | 3,6606 | 2,3752 | 42,097 | 141,026 |
| 13,5 | 182,25 | 2460,375 | 3,6742 | 2,3811 | 42,412 | 143,139 |
| 13,6 | 184,96 | 2515,456 | 3,6878 | 2,3870 | 42,726 | 145,267 |
| 13,7 | 187,69 | 2571,353 | 3,7014 | 2,3928 | 43,040 | 147,411 |
| 13,8 | 190,44 | 2628,072 | 3,7148 | 2,3986 | 43,354 | 149,571 |
| 13,9 | 193,21 | 2685,619 | 3,7283 | 2,4044 | 43,668 | 151,747 |
| **14,0** | 196,00 | 2744,000 | 3,7417 | 2,4101 | 43,982 | 153,938 |
| 14,1 | 198,81 | 2803,221 | 3,7550 | 2,4159 | 44,296 | 156,145 |
| 14,2 | 201,64 | 2863,288 | 3,7683 | 2,4216 | 44,611 | 158,368 |
| 14,3 | 204,49 | 2924,207 | 3,7815 | 2,4272 | 44,925 | 160,606 |
| 14,4 | 207,36 | 2985,984 | 3,7947 | 2,4329 | 45,239 | 162,860 |
| 14,5 | 210,25 | 3048,625 | 3,8079 | 2,4385 | 45,553 | 165,130 |
| 14,6 | 213,16 | 3112,136 | 3,8210 | 2,4441 | 45,867 | 167,415 |
| 14,7 | 216,09 | 3176,523 | 3,8341 | 2,4497 | 46,181 | 169,717 |
| 14,8 | 219,04 | 3241,792 | 3,8471 | 2,4552 | 46,496 | 172,034 |
| 14,9 | 222,01 | 3307,949 | 3,8601 | 2,4607 | 46,810 | 174,366 |
| **15,0** | 225,00 | 3375,000 | 3,8730 | 2,4662 | 47,124 | 176,715 |

15—20

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2 \pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **15,0** | 225,00 | 3375,000 | 3,8730 | 2,4662 | 47,124 | 176,715 |
| 15,1 | 228,01 | 3442,951 | 3,8859 | 2,4717 | 47,438 | 179,079 |
| 15,2 | 231,04 | 3511,808 | 3,8987 | 2,4771 | 47,752 | 181,458 |
| 15,3 | 234,09 | 3581,577 | 3,9115 | 2,4825 | 48,066 | 183,854 |
| 15,4 | 237,16 | 3652,264 | 3,9243 | 2,4879 | 48,381 | 186,265 |
| 15,5 | 240,25 | 3723,875 | 3,9370 | 2,4933 | 48,695 | 188,692 |
| 15,6 | 243,36 | 3796,416 | 3,9497 | 2,4987 | 49,009 | 191,134 |
| 15,7 | 246,49 | 3869,893 | 3,9623 | 2,5040 | 49,323 | 193,593 |
| 15,8 | 249,64 | 3944,312 | 3,9749 | 2,5093 | 49,637 | 196,067 |
| 15,9 | 252,81 | 4019,679 | 3,9875 | 2,5146 | 49,951 | 198,557 |
| **16,0** | 256,00 | 4096,000 | 4,0000 | 2,5198 | 50,265 | 201,062 |
| 16,1 | 259,21 | 4173,281 | 4,0125 | 2,5251 | 50,580 | 203,583 |
| 16,2 | 262,44 | 4251,528 | 4,0249 | 2,5303 | 50,894 | 206,120 |
| 16,3 | 265,69 | 4330,747 | 4,0373 | 2,5355 | 51,208 | 208,672 |
| 16,4 | 268,96 | 4410,944 | 4,0497 | 2,5407 | 51,522 | 211,241 |
| 16,5 | 272,25 | 4492,125 | 4,0620 | 2,5458 | 51,836 | 213,825 |
| 16,6 | 275,56 | 4574,296 | 4,0743 | 2,5509 | 52,150 | 216,424 |
| 16,7 | 278,89 | 4657,463 | 4,0866 | 2,5561 | 52,465 | 219,040 |
| 16,8 | 282,24 | 4741,632 | 4,0988 | 2,5612 | 52,779 | 221,671 |
| 16,9 | 285,61 | 4826,809 | 4,1110 | 2,5662 | 53,093 | 224,318 |
| **17,0** | 289,00 | 4913,000 | 4,1231 | 2,5713 | 53,407 | 226,980 |
| 17,1 | 292,41 | 5000,211 | 4,1352 | 2,5763 | 53,721 | 229,658 |
| 17,2 | 295,84 | 5088,448 | 4,1473 | 2,5813 | 54,035 | 232,352 |
| 17,3 | 299,29 | 5177,717 | 4,1593 | 2,5863 | 54,350 | 235,062 |
| 17,4 | 302,76 | 5268,024 | 4,1713 | 2,5913 | 54,664 | 237,787 |
| 17,5 | 306,25 | 5359,375 | 4,1833 | 2,5962 | 54,978 | 240,528 |
| 17,6 | 309,76 | 5451,776 | 4,1952 | 2,6012 | 55,292 | 243,285 |
| 17,7 | 313,29 | 5545,233 | 4,2071 | 2,6061 | 55,606 | 246,057 |
| 17,8 | 316,84 | 5639,752 | 4,2190 | 2,6110 | 55,920 | 248,846 |
| 17,9 | 320,41 | 5735,339 | 4,2308 | 2,6159 | 56,235 | 251,649 |
| **18,0** | 324,00 | 5832,000 | 4,2426 | 2,6207 | 56,549 | 254,469 |
| 18,1 | 327,61 | 5929,741 | 4,2544 | 2,6256 | 56,863 | 257,304 |
| 18,2 | 331,24 | 6028,568 | 4,2661 | 2,6304 | 57,177 | 260,155 |
| 18,3 | 334,89 | 6128,487 | 4,2778 | 2,6352 | 57,491 | 263,022 |
| 18,4 | 338,56 | 6229,504 | 4,2895 | 2,6400 | 57,805 | 265,904 |
| 18,5 | 342,25 | 6331,625 | 4,3012 | 2,6448 | 58,119 | 268,803 |
| 18,6 | 345,96 | 6434,856 | 4,3128 | 2,6495 | 58,434 | 271,716 |
| 18,7 | 349,69 | 6539,203 | 4,3243 | 2,6543 | 58,748 | 274,646 |
| 18,8 | 353,44 | 6644,672 | 4,3359 | 2,6590 | 59,062 | 277,591 |
| 18,9 | 357,21 | 6751,269 | 4,3474 | 2,6637 | 59,376 | 280,552 |
| **19,0** | 361,00 | 6859,000 | 4,3589 | 2,6684 | 59,690 | 283,529 |
| 19,1 | 364,81 | 6967,871 | 4,3704 | 2,6731 | 60,004 | 286,521 |
| 19,2 | 368,64 | 7077,888 | 4,3818 | 2,6777 | 60,319 | 289,529 |
| 19,3 | 372,49 | 7189,057 | 4,3932 | 2,6824 | 60,633 | 292,553 |
| 19,4 | 376,36 | 7301,384 | 4,4045 | 2,6870 | 60,947 | 295,592 |
| 19,5 | 380,25 | 7414,875 | 4,4159 | 2,6916 | 61,261 | 298,648 |
| 19,6 | 384,16 | 7529,536 | 4,4272 | 2,6962 | 61,575 | 301,719 |
| 19,7 | 388,09 | 7645,373 | 4,4385 | 2,7008 | 61,889 | 304,805 |
| 19,8 | 392,04 | 7762,392 | 4,4497 | 2,7053 | 62,204 | 307,907 |
| 19,9 | 396,01 | 7880,599 | 4,4609 | 2,7099 | 62,518 | 311,026 |
| **20,0** | 400,00 | 8000,000 | 4,4721 | 2,7144 | 62,832 | 314,159 |

20—25

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2 \pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **20,0** | 400,00 | 8 000,000 | 4,4721 | 2,7144 | 62,832 | 314,159 |
| 20,1 | 404,01 | 8 120,601 | 4,4833 | 2,7189 | 63,146 | 317,309 |
| 20,2 | 408,04 | 8 242,408 | 4,4944 | 2,7234 | 63,460 | 320,474 |
| 20,3 | 412,09 | 8 365,427 | 4,5056 | 2,7279 | 63,774 | 323,655 |
| 20,4 | 416,16 | 8 489,664 | 4,5166 | 2,7324 | 64,088 | 326,851 |
| 20,5 | 420,25 | 8 615,125 | 4,5277 | 2,7369 | 64,403 | 330,064 |
| 20,6 | 424,36 | 8 741,816 | 4,5387 | 2,7413 | 64,717 | 333,292 |
| 20,7 | 428,49 | 8 869,743 | 4,5497 | 2,7457 | 65,031 | 336,535 |
| 20,8 | 432,64 | 8 998,912 | 4,5607 | 2,7501 | 65,345 | 339,795 |
| 20,9 | 436,81 | 9 129,329 | 4,5717 | 2,7545 | 65,659 | 343,070 |
| **21,0** | 441,00 | 9 261,000 | 4,5826 | 2,7589 | 65,973 | 346,361 |
| 21,1 | 445,21 | 9 393,931 | 4,5935 | 2,7633 | 66,288 | 349,667 |
| 21,2 | 449,44 | 9 528,128 | 4,6043 | 2,7677 | 66,602 | 352,989 |
| 21,3 | 453,69 | 9 663,597 | 4,6152 | 2,7720 | 66,916 | 356,327 |
| 21,4 | 457,96 | 9 800,344 | 4,6260 | 2,7763 | 67,230 | 359,681 |
| 21,5 | 462,25 | 9 938,375 | 4,6368 | 2,7806 | 67,544 | 363,050 |
| 21,6 | 466,56 | 10 077,696 | 4,6476 | 2,7850 | 67,858 | 366,435 |
| 21,7 | 470,89 | 10 218,313 | 4,6583 | 2,7892 | 68,173 | 369,836 |
| 21,8 | 475,24 | 10 360,232 | 4,6690 | 2,7935 | 68,487 | 373,253 |
| 21,9 | 479,61 | 10 503,459 | 4,6797 | 2,7978 | 68,801 | 376,685 |
| **22,0** | 484,00 | 10 648,000 | 4,6904 | 2,8020 | 69,115 | 380,133 |
| 22,1 | 488,41 | 10 793,861 | 4,7011 | 2,8063 | 69,429 | 383,596 |
| 22,2 | 492,84 | 10 941,048 | 4,7117 | 2,8105 | 69,743 | 387,076 |
| 22,3 | 497,29 | 11 089,567 | 4,7223 | 2,8147 | 70,058 | 390,571 |
| 22,4 | 501,76 | 11 239,424 | 4,7329 | 2,8189 | 70,372 | 394,081 |
| 22,5 | 506,25 | 11 390,625 | 4,7434 | 2,8231 | 70,686 | 397,608 |
| 22,6 | 510,76 | 11 543,176 | 4,7539 | 2,8273 | 71,000 | 401,150 |
| 22,7 | 515,29 | 11 697,083 | 4,7645 | 2,8314 | 71,314 | 404,708 |
| 22,8 | 519,84 | 11 852,352 | 4,7749 | 2,8356 | 71,628 | 408,281 |
| 22,9 | 524,41 | 12 008,989 | 4,7854 | 2,8397 | 71,942 | 411,871 |
| **23,0** | 529,00 | 12 167,000 | 4,7958 | 2,8439 | 72,257 | 415,476 |
| 23,1 | 533,61 | 12 326,391 | 4,8062 | 2,8480 | 72,571 | 419,096 |
| 23,2 | 538,24 | 12 487,168 | 4,8166 | 2,8521 | 72,885 | 422,733 |
| 23,3 | 542,89 | 12 649,337 | 4,8270 | 2,8562 | 73,199 | 426,385 |
| 23,4 | 547,56 | 12 812,904 | 4,8374 | 2,8603 | 73,513 | 430,053 |
| 23,5 | 552,25 | 12 977,875 | 4,8477 | 2,8643 | 73,827 | 433,736 |
| 23,6 | 556,96 | 13 144,256 | 4,8580 | 2,8684 | 74,142 | 437,435 |
| 23,7 | 561,69 | 13 312,053 | 4,8683 | 2,8724 | 74,456 | 441,150 |
| 23,8 | 566,44 | 13 481,272 | 4,8785 | 2,8765 | 74,770 | 444,881 |
| 23,9 | 571,21 | 13 651,919 | 4,8888 | 2,8805 | 75,084 | 448,627 |
| **24,0** | 576,00 | 13 824,000 | 4,8990 | 2,8845 | 75,398 | 452,389 |
| 24,1 | 580,81 | 13 997,521 | 4,9092 | 2,8885 | 75,712 | 456,167 |
| 24,2 | 585,64 | 14 172,488 | 4,9193 | 2,8925 | 76,027 | 459,961 |
| 24,3 | 590,49 | 14 348,907 | 4,9295 | 2,8965 | 76,341 | 463,770 |
| 24,4 | 595,36 | 14 526,784 | 4,9396 | 2,9004 | 76,655 | 467,595 |
| 24,5 | 600,25 | 14 706,125 | 4,9497 | 2,9044 | 76,969 | 471,435 |
| 24,6 | 605,16 | 14 886,936 | 4,9598 | 2,9083 | 77,283 | 475,292 |
| 24,7 | 610,09 | 15 069,223 | 4,9699 | 2,9123 | 77,597 | 479,164 |
| 24,8 | 615,04 | 15 252,992 | 4,9800 | 2,9162 | 77,911 | 483,051 |
| 24,9 | 620,01 | 15 438,249 | 4,9900 | 2,9201 | 78,226 | 486,955 |
| **25,0** | 625,00 | 15 625,000 | 5,0000 | 2,9240 | 78,540 | 490,874 |

25—30

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2 \pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **25,0** | 625,00 | 15 625,000 | 5,0000 | 2,9240 | 78,540 | 490,874 |
| 25,1 | 630,01 | 15 813,251 | 5,0099 | 2,9279 | 78,854 | 494,809 |
| 25,2 | 635,04 | 16 003,008 | 5,0199 | 2,9318 | 79,168 | 498,759 |
| 25,3 | 640,09 | 16 194,277 | 5,0299 | 2,9357 | 79,482 | 502,726 |
| 25,4 | 645,16 | 16 387,064 | 5,0398 | 2,9395 | 79,796 | 506,707 |
| 25,5 | 650,25 | 16 581,375 | 5,0498 | 2,9434 | 80,111 | 510,705 |
| 25,6 | 655,36 | 16 777,216 | 5,0596 | 2,9472 | 80,425 | 514,719 |
| 25,7 | 660,49 | 16 974,593 | 5,0695 | 2,9511 | 80,739 | 518,748 |
| 25,8 | 665,64 | 17 173,512 | 5,0794 | 2,9549 | 81,053 | 522,792 |
| 25,9 | 670,81 | 17 373,979 | 5,0892 | 2,9587 | 81,367 | 526,853 |
| **26,0** | 676,00 | 17 576,000 | 5,0990 | 2,9625 | 81,681 | 530,929 |
| 26,1 | 681,21 | 17 779,581 | 5,1088 | 2,9663 | 81,996 | 535,021 |
| 26,2 | 686,44 | 17 984,728 | 5,1186 | 2,9701 | 82,310 | 539,129 |
| 26,3 | 691,69 | 18 191,447 | 5,1284 | 2,9738 | 82,624 | 543,252 |
| 26,4 | 696,96 | 18 399,744 | 5,1381 | 2,9776 | 82,938 | 547,391 |
| 26,5 | 702,25 | 18 609,625 | 5,1478 | 2,9814 | 83,252 | 551,546 |
| 26,6 | 707,56 | 18 821,096 | 5,1575 | 2,9851 | 83,566 | 555,716 |
| 26,7 | 712,89 | 19 034,163 | 5,1672 | 2,9888 | 83,881 | 559,902 |
| 26,8 | 718,24 | 19 248,832 | 5,1769 | 2,9926 | 84,195 | 564,104 |
| 26,9 | 723,61 | 19 465,109 | 5,1865 | 2,9963 | 84,509 | 568,322 |
| **27,0** | 729,00 | 19 683,000 | 5,1962 | 3,0000 | 84,823 | 572,555 |
| 27,1 | 734,41 | 19 902,511 | 5,2058 | 3,0037 | 85,137 | 576,804 |
| 27,2 | 739,84 | 20 123,648 | 5,2154 | 3,0074 | 85,451 | 581,069 |
| 27,3 | 745,29 | 20 346,417 | 5,2249 | 3,0111 | 85,765 | 585,349 |
| 27,4 | 750,76 | 20 570,824 | 5,2345 | 3,0147 | 86,080 | 589,646 |
| 27,5 | 756,25 | 20 796,875 | 5,2440 | 3,0184 | 86,394 | 593,957 |
| 27,6 | 761,76 | 21 024,576 | 5,2536 | 3,0221 | 86,708 | 598,285 |
| 27,7 | 767,29 | 21 353,933 | 5,2631 | 3,0257 | 87,022 | 602,628 |
| 27,8 | 772,84 | 21 484,952 | 5,2726 | 3,0293 | 87,336 | 606,987 |
| 27,9 | 778,41 | 21 717,639 | 5,2820 | 3,0330 | 87,650 | 611,362 |
| **28,0** | 784,00 | 21 952,000 | 5,2915 | 3,0366 | 87,965 | 615,752 |
| 28,1 | 789,61 | 22 188,041 | 5,3009 | 3,0402 | 88,279 | 620,158 |
| 28,2 | 795,24 | 22 425,768 | 5,3104 | 3,0438 | 88,593 | 624,580 |
| 28,3 | 800,89 | 22 665,187 | 5,3198 | 3,0474 | 88,907 | 629,018 |
| 28,4 | 806,56 | 22 906,304 | 5,3292 | 3,0510 | 89,221 | 633,471 |
| 28,5 | 812,25 | 23 149,125 | 5,3385 | 3,0546 | 89,535 | 637,940 |
| 28,6 | 817,96 | 23 393,656 | 5,3479 | 3,0581 | 89,850 | 642,424 |
| 28,7 | 823,69 | 23 639,903 | 5,3572 | 3,0617 | 90,164 | 646,925 |
| 28,8 | 829,44 | 23 887,872 | 5,3666 | 3,0652 | 90,478 | 651,441 |
| 28,9 | 835,21 | 24 137,569 | 5,3759 | 3,0688 | 90,792 | 655,972 |
| **29,0** | 841,00 | 24 389,000 | 5,3852 | 3,0723 | 91,106 | 660,520 |
| 29,1 | 846,81 | 24 642,171 | 5,3944 | 3,0758 | 91,420 | 665,083 |
| 29,2 | 852,64 | 24 897,088 | 5,4037 | 3,0794 | 91,735 | 669,662 |
| 29,3 | 858,49 | 25 153,757 | 5,4129 | 3,0829 | 92,049 | 674,256 |
| 29,4 | 864,36 | 25 412,184 | 5,4222 | 3,0864 | 92,363 | 678,867 |
| 29,5 | 870,25 | 25 672,375 | 5,4314 | 3,0899 | 92,677 | 683,493 |
| 29,6 | 876,16 | 25 934,336 | 5,4406 | 3,0934 | 92,991 | 688,134 |
| 29,7 | 882,09 | 26 198,073 | 5,4498 | 3,0968 | 93,305 | 692,792 |
| 29,8 | 888,04 | 26 463,592 | 5,4589 | 3,1003 | 93,619 | 697,465 |
| 29,9 | 894,01 | 26 730,899 | 5,4681 | 3,1038 | 93,934 | 702,154 |
| **30,0** | 900,00 | 27 000,000 | 5,4772 | 3,1072 | 94,248 | 706,858 |

30—35

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **30,0** | 900,00 | 27 000,000 | 5,4772 | 3,1072 | 94,248 | 706,858 |
| 30,1 | 906,01 | 27 270,901 | 5,4863 | 3,1107 | 94,562 | 711,579 |
| 30,2 | 912,04 | 27 543,608 | 5,4955 | 3,1141 | 94,876 | 716,315 |
| 30,3 | 918,09 | 27 818,127 | 5,5045 | 3,1176 | 95,190 | 721,066 |
| 30,4 | 924,16 | 28 094,464 | 5,5136 | 4,1210 | 95,504 | 725,834 |
| 30,5 | 930,25 | 28 372,625 | 5,5227 | 3,1244 | 95,819 | 730,617 |
| 30,6 | 936,36 | 28 652,616 | 5,5317 | 3,1278 | 96,133 | 735,415 |
| 30,7 | 942,49 | 28 934,443 | 5,5408 | 3,1312 | 96,447 | 740,230 |
| 30,8 | 948,64 | 29 218,112 | 5,5498 | 3,1346 | 96,761 | 745,060 |
| 30,9 | 954,81 | 29 503,629 | 5,5588 | 3,1380 | 97,075 | 749,906 |
| **31,0** | 961,00 | 29 791,000 | 5,5678 | 3,1414 | 97,389 | 754,768 |
| 31,1 | 967,21 | 30 080,231 | 5,5767 | 3,1448 | 97,704 | 759,645 |
| 31,2 | 973,44 | 30 371,328 | 5,5857 | 3,1481 | 98,018 | 764,538 |
| 31,3 | 979,69 | 30 664,297 | 5,5946 | 3,1515 | 98,332 | 769,447 |
| 31,4 | 985,96 | 30 959,144 | 5,6036 | 3,1548 | 98,646 | 774,371 |
| 31,5 | 992,25 | 31 255,875 | 5,6125 | 3,1582 | 98,960 | 779,311 |
| 31,6 | 998,56 | 31 554,496 | 5,6214 | 3,1615 | 99,274 | 784,267 |
| 31,7 | 1004,89 | 31 855,013 | 5,6303 | 3,1648 | 99,588 | 789,239 |
| 31,8 | 1011,24 | 32 157,432 | 5,6391 | 3,1682 | 99,903 | 794,226 |
| 31,9 | 1017,61 | 32 461,759 | 5,6480 | 3,1715 | 100,22 | 799,229 |
| **32,0** | 1024,00 | 32 768,000 | 5,6569 | 3,1748 | 100,53 | 804,248 |
| 32,1 | 1030,41 | 33 076,161 | 5,6657 | 3,1781 | 100,85 | 809,282 |
| 32,2 | 1036,84 | 33 386,248 | 5,6745 | 3,1814 | 101,16 | 814,332 |
| 32,3 | 1043,29 | 33 698,267 | 5,6833 | 3,1847 | 101,47 | 819,398 |
| 32,4 | 1049,76 | 34 012,224 | 5,6921 | 3,1880 | 101,79 | 824,480 |
| 32,5 | 1056,25 | 34 328,125 | 5,7009 | 3,1913 | 102,10 | 829,577 |
| 32,6 | 1062,76 | 34 645,976 | 5,7096 | 3,1945 | 102,42 | 834,690 |
| 32,7 | 1069,29 | 34 965,783 | 5,7184 | 3,1978 | 102,73 | 839,818 |
| 32,8 | 1075,84 | 35 287,552 | 5,7271 | 3,2010 | 103,04 | 844,963 |
| 32,9 | 1082,41 | 35 611,289 | 5,7359 | 3,2043 | 103,36 | 850,123 |
| **33,0** | 1089,00 | 35 937,000 | 5,7446 | 3,2075 | 103,67 | 855,299 |
| 33,1 | 1095,61 | 36 264,691 | 5,7533 | 3,2108 | 103,99 | 860,490 |
| 33,2 | 1102,24 | 36 594,368 | 5,7619 | 3,2140 | 104,30 | 865,697 |
| 33,3 | 1108,89 | 36 926,037 | 5,7706 | 3,2172 | 104,62 | 870,920 |
| 33,4 | 1115,56 | 37 259,704 | 5,7792 | 3,2204 | 104,93 | 876,159 |
| 33,5 | 1122,25 | 37 595,375 | 5,7879 | 3,2237 | 105,24 | 881,413 |
| 33,6 | 1128,96 | 37 933,056 | 5,7966 | 3,2269 | 105,56 | 886,683 |
| 33,7 | 1135,69 | 38 272,753 | 5,8052 | 3,2301 | 105,87 | 891,969 |
| 33,8 | 1142,44 | 38 614,472 | 5,8138 | 3,2332 | 106,19 | 897,270 |
| 33,9 | 1149,21 | 38 958,219 | 5,8224 | 3,2364 | 106,50 | 902,587 |
| **34,0** | 1156,00 | 39 304,000 | 5,8310 | 3,2396 | 106,81 | 907,920 |
| 34,1 | 1162,81 | 39 651,821 | 5,8395 | 3,2428 | 107,13 | 913,269 |
| 34,2 | 1169,64 | 40 001,688 | 5,8481 | 3,2460 | 107,44 | 918,633 |
| 34,3 | 1176,49 | 40 353,607 | 5,8566 | 3,2491 | 107,76 | 924,013 |
| 34,4 | 1183,36 | 40 707,584 | 5,8652 | 3,2523 | 108,07 | 929,409 |
| 34,5 | 1190,25 | 41 063,625 | 5,8737 | 3,2554 | 108,38 | 934,820 |
| 34,6 | 1197,16 | 41 421,736 | 5,8822 | 3,2586 | 108,70 | 940,247 |
| 34,7 | 1204,09 | 41 781,923 | 5,8907 | 3,2617 | 109,01 | 945,690 |
| 34,8 | 1211,04 | 12 144,192 | 5,8992 | 3,2648 | 109,33 | 951,149 |
| 34,9 | 1218,01 | 42 508,549 | 5,9076 | 3,2679 | 109,64 | 956,623 |
| **35,0** | 1225,00 | 42 875,000 | 5,9161 | 3,2711 | 109,96 | 962,113 |

35—40

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **35,0** | 1225,00 | 42 875,000 | 5,9161 | 3,2711 | 109,96 | 962,113 |
| 35,1 | 1232,01 | 43 243,551 | 5,9245 | 3,2742 | 110,27 | 967,618 |
| 35,2 | 1239,04 | 43 614,208 | 5,9330 | 3,2773 | 110,58 | 973,140 |
| 35,3 | 1246,09 | 43 986,977 | 5,9414 | 3,2804 | 110,90 | 978,677 |
| 35,4 | 1253,16 | 44 361,864 | 5,9498 | 3,2835 | 111,21 | 984,230 |
| 35,5 | 1260,25 | 44 738,875 | 5,9582 | 3,2866 | 111,53 | 989,798 |
| 35,6 | 1267,36 | 45 118,016 | 5,9666 | 3,2897 | 111,84 | 995,382 |
| 35,7 | 1274,49 | 45 499,293 | 5,9749 | 3,2927 | 112,15 | 1000,98 |
| 35,8 | 1281,64 | 45 882,712 | 5,9833 | 3,2958 | 112,47 | 1006,60 |
| 35,9 | 1288,81 | 46 268,279 | 5,9917 | 3,2989 | 112,78 | 1012,23 |
| **36,0** | 1296,00 | 46 656,000 | 6,0000 | 3,3019 | 113,10 | 1017,88 |
| 36,1 | 1303,21 | 47 045,881 | 6,0083 | 3,3050 | 113,41 | 1023,54 |
| 36,2 | 1310,44 | 47 437,928 | 6,0116 | 3,3080 | 113,73 | 1029,22 |
| 36,3 | 1317,69 | 47 832,147 | 6,0249 | 3,3111 | 114,04 | 1034,91 |
| 36,4 | 1324,96 | 48 228,544 | 6,0332 | 3,3141 | 114,35 | 1040,62 |
| 36,5 | 1332,25 | 48 627,125 | 6,0415 | 3,3171 | 114,67 | 1046,35 |
| 36,6 | 1339,56 | 49 027,896 | 6,0498 | 3,3202 | 114,98 | 1052,09 |
| 36,7 | 1346,89 | 49 430,863 | 6,0581 | 3,3232 | 115,30 | 1057,84 |
| 36,8 | 1354,24 | 49 836,032 | 6,0663 | 3,3262 | 115,61 | 1063,62 |
| 36,9 | 1361,61 | 50 243,409 | 6,0745 | 3,3292 | 115,92 | 1069,41 |
| **37,0** | 1369,00 | 50 653,000 | 6,0828 | 3,3322 | 116,24 | 1075,21 |
| 37,1 | 1376,41 | 51 064,811 | 6,0910 | 3,3352 | 116,55 | 1081,03 |
| 37,2 | 1383,84 | 51 478,848 | 6,0992 | 3,3382 | 116,87 | 1086,87 |
| 37,3 | 1391,29 | 51 895,117 | 6,1074 | 3,3412 | 117,18 | 1092,72 |
| 37,4 | 1398,76 | 52 313,624 | 6,1156 | 3,3442 | 117,50 | 1098,58 |
| 37,5 | 1406,25 | 52 734,375 | 6,1237 | 3,3472 | 117,81 | 1104,47 |
| 37,6 | 1413,76 | 53 157,376 | 6,1319 | 3,3501 | 118,12 | 1110,36 |
| 37,7 | 1421,29 | 53 582,633 | 6,1400 | 3,3531 | 118,44 | 1116,28 |
| 37,8 | 1428,84 | 54 010,152 | 6,1482 | 3,3561 | 118,75 | 1122,21 |
| 37,9 | 1436,41 | 54 439,939 | 6,1563 | 3,3590 | 119,07 | 1128,15 |
| **38,0** | 1444,00 | 54 872,000 | 6,1644 | 3,3620 | 119,38 | 1134,11 |
| 38,1 | 1451,61 | 55 306,341 | 6,1725 | 3,3649 | 119,69 | 1140,09 |
| 38,2 | 1459,24 | 55 742,968 | 6,1806 | 3,3679 | 120,01 | 1146,08 |
| 38,3 | 1466,89 | 56 181,887 | 6,1887 | 3,3708 | 120,32 | 1152,09 |
| 38,4 | 1474,56 | 56 623,104 | 6,1968 | 3,3737 | 120,64 | 1158,12 |
| 38,5 | 1482,25 | 57 066,625 | 6.2048 | 3,3767 | 120,95 | 1164,16 |
| 38,6 | 1489,96 | 57 512,456 | 6,2129 | 3,3796 | 121,27 | 1170,21 |
| 38,7 | 1497,69 | 57 960,603 | 6,2209 | 3,3825 | 121,58 | 1176,28 |
| 38,8 | 1505,44 | 58 411,072 | 6,2290 | 3,3854 | 121,89 | 1182,37 |
| 38,9 | 1513,21 | 58 863,869 | 6,2370 | 3,3883 | 122,21 | 1188,47 |
| **39,0** | 1521,00 | 59 319,000 | 6,2450 | 3,3912 | 122,52 | 1194,59 |
| 39,1 | 1528,81 | 59 776,471 | 6,2530 | 3,3941 | 122,84 | 1200,72 |
| 39,2 | 1536,64 | 60 236,288 | 6,2610 | 3,3970 | 123,15 | 1206,87 |
| 39,3 | 1544,49 | 60 698,457 | 6,2690 | 3,3999 | 123,46 | 1213,04 |
| 39,4 | 1552,36 | 61 162,984 | 6,2769 | 3,4028 | 123,78 | 1219,22 |
| 39,5 | 1560,25 | 61 629,875 | 6,2849 | 3,4056 | 124,09 | 1225,42 |
| 39,6 | 1568,16 | 62 099,136 | 6,2929 | 3,4085 | 124,41 | 1231,63 |
| 39,7 | 1576,09 | 62 570,773 | 6,3008 | 3,4114 | 124,72 | 1237,86 |
| 39,8 | 1584,04 | 63 044,792 | 6,3087 | 3,4142 | 125,04 | 1244,10 |
| 39,9 | 1592,01 | 63 521,199 | 6,3166 | 3,4171 | 125,35 | 1250,36 |
| **40,0** | 1600,00 | 64 000,000 | 6,3246 | 3,4200 | 125,66 | 1256,64 |

40—45

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **40,0** | 1600,00 | 64 000,000 | 6,3246 | 3,4200 | 125,66 | 1256,64 |
| 40,1 | 1608,01 | 64 481,201 | 6,3325 | 3,4228 | 125,98 | 1262,93 |
| 40,2 | 1616,04 | 64 964,808 | 6,3403 | 3,4256 | 126,29 | 1269,23 |
| 40,3 | 1624,09 | 65 450,827 | 6,3482 | 3,4285 | 126,61 | 1275,56 |
| 40,4 | 1632,16 | 65 939,264 | 6,3561 | 3,4313 | 126,92 | 1281,90 |
| 40,5 | 1640,25 | 66 430,125 | 6,3640 | 3,4341 | 127,23 | 1288,25 |
| 40,6 | 1648,36 | 66 923,416 | 6,3718 | 3,4370 | 127,55 | 1294,62 |
| 40,7 | 1656,49 | 67 419,143 | 6,3797 | 3,4398 | 127,86 | 1301,00 |
| 40,8 | 1664,64 | 67 917,312 | 6,3875 | 3,4426 | 128,18 | 1307,41 |
| 40,9 | 1672,81 | 68 417,929 | 6,3953 | 3,4454 | 128,49 | 1313,82 |
| **41,0** | 1681,00 | 68 921,000 | 6,4031 | 3,4482 | 128,81 | 1320,25 |
| 41,1 | 1689,21 | 69 426,531 | 6,4109 | 3,4510 | 129,12 | 1326,70 |
| 41,2 | 1697,44 | 69 934,528 | 6,4187 | 3,4538 | 129,43 | 1333,17 |
| 41,3 | 1705,69 | 70 444,997 | 6,4265 | 3,4566 | 129,75 | 1339,65 |
| 41,4 | 1713,96 | 70 957,944 | 6,4343 | 3,4594 | 130,06 | 1346,14 |
| 41,5 | 1722,25 | 71 473,375 | 6,4420 | 3,4622 | 130,38 | 1352,65 |
| 41,6 | 1730,56 | 71 991,296 | 6,4498 | 3,4650 | 130,69 | 1359,18 |
| 41,7 | 1738,89 | 72 511,713 | 6,4576 | 3,4677 | 131,00 | 1365,72 |
| 41,8 | 1747,24 | 73 034,623 | 6,4653 | 3,4705 | 131,32 | 1372,28 |
| 41,9 | 1755,61 | 73 560,059 | 6,4730 | 3,4733 | 131,63 | 1378,85 |
| **42,0** | 1764,00 | 74 088,000 | 6,4807 | 3,4760 | 131,95 | 1385,44 |
| 42,1 | 1772,41 | 74 618,461 | 6,4885 | 3,4788 | 132,26 | 1392,05 |
| 42,2 | 1780,84 | 75 151,448 | 6,4961 | 3,4815 | 132,58 | 1398,67 |
| 42,3 | 1789,29 | 75 686,967 | 6,5038 | 3,4843 | 132,89 | 1405,31 |
| 42,4 | 1797,76 | 76 225,024 | 6,5115 | 3,4870 | 133,20 | 1411,96 |
| 42,5 | 1806,25 | 76 765,625 | 6,5192 | 3,4898 | 133,52 | 1418,63 |
| 42,6 | 1814,76 | 77 308,776 | 6,5269 | 3,4925 | 133,83 | 1425,31 |
| 42,7 | 1823,29 | 77 854,483 | 6,5345 | 3,4952 | 134,15 | 1432,01 |
| 42,8 | 1831,84 | 78 402,752 | 6,5422 | 3,4980 | 134,46 | 1438,72 |
| 42,9 | 1840,41 | 78 953,589 | 6,5498 | 3,5007 | 134,77 | 1445,45 |
| **43,0** | 1849,00 | 79 507,000 | 6,5574 | 3,5034 | 135,09 | 1452,20 |
| 43,1 | 1857,61 | 80 062,991 | 6,5651 | 3,5061 | 135,40 | 1458,96 |
| 43,2 | 1866,24 | 80 621,568 | 6,5727 | 3,5088 | 135,72 | 1465,74 |
| 43,3 | 1874,89 | 81 182,737 | 6,5803 | 3,5115 | 136,03 | 1472,54 |
| 43,4 | 1883,56 | 81 746,504 | 6,5879 | 3,5142 | 136,35 | 1479,34 |
| 43,5 | 1892,25 | 82 312,875 | 6,5955 | 3,5169 | 136,66 | 1486,17 |
| 43,6 | 1900,96 | 82 881,856 | 6,6030 | 3,5196 | 136,97 | 1493,01 |
| 43,7 | 1909,69 | 83 453,453 | 6,6106 | 3,5223 | 137,29 | 1499,87 |
| 43,8 | 1918,44 | 84 027,672 | 6,6182 | 3,5250 | 137,60 | 1506,74 |
| 43,9 | 1927,21 | 84 604,519 | 6,6257 | 3,5277 | 137,92 | 1513,63 |
| **44,0** | 1936,00 | 85 184,000 | 6,6332 | 3,5303 | 138,23 | 1520,53 |
| 44,1 | 1944,81 | 85 766,121 | 6,6408 | 3,5330 | 138,54 | 1527,45 |
| 44,2 | 1953,64 | 86 350,888 | 6,6483 | 3,5357 | 138,86 | 1534,39 |
| 44,3 | 1962,49 | 86 938,307 | 6,6558 | 3,5384 | 139,17 | 1541,34 |
| 44,4 | 1971,36 | 87 528,384 | 6,6633 | 3,5410 | 139,49 | 1548,30 |
| 44,5 | 1980,25 | 88 121,125 | 6,6708 | 3,5437 | 139,80 | 1555,28 |
| 44,6 | 1989,16 | 88 716,536 | 6,6783 | 3,5463 | 140,12 | 1562,28 |
| 44,7 | 1998,09 | 89 314,623 | 6,6858 | 3,5490 | 140,43 | 1569,30 |
| 44,8 | 2007,04 | 89 915,392 | 6,6933 | 3,5516 | 140,74 | 1576,33 |
| 44,9 | 2016,01 | 90 518,849 | 6,7007 | 3,5543 | 141,06 | 1583,37 |
| **45,0** | 2025,00 | 91 125,000 | 6,7082 | 3,5569 | 141,37 | 1590,43 |

45—50

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2 \pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **45,0** | 2025,00 | 91 125,000 | 6,7082 | 3,5569 | 141,37 | 1590,43 |
| 45,1 | 2034,01 | 91 733,851 | 6,7157 | 3,5595 | 141,69 | 1597,51 |
| 45,2 | 2043,04 | 92 345,408 | 6,7231 | 3,5622 | 142,00 | 1604,60 |
| 45,3 | 2052,09 | 92 959,677 | 6,7305 | 3,5648 | 142,31 | 1611,71 |
| 45,4 | 2061,16 | 93 576,664 | 6,7380 | 3,5674 | 142,63 | 1618,83 |
| 45,5 | 2070,25 | 94 196,375 | 6,7454 | 3,5700 | 142,94 | 1625,97 |
| 45,6 | 2079,36 | 94 818,816 | 6,7528 | 3,5726 | 143,26 | 1633,13 |
| 45,7 | 2088,49 | 95 443,993 | 6,7602 | 3,5752 | 143,57 | 1640,30 |
| 45,8 | 2097,64 | 96 071,912 | 6,7676 | 3,5778 | 143,88 | 1647,48 |
| 45,9 | 2106,81 | 96 702,579 | 6,7750 | 3,5805 | 144,20 | 1654,68 |
| **46,0** | 2116,00 | 97 336,000 | 6,7823 | 3,5830 | 144,51 | 1661,90 |
| 46,1 | 2125,21 | 97 972,181 | 6,7897 | 3,5856 | 144,83 | 1669,14 |
| 46,2 | 2134,44 | 98 611,128 | 6,7971 | 3,5882 | 145,14 | 1676,39 |
| 46,3 | 2143,69 | 99 252,847 | 6,8044 | 3,5908 | 145,46 | 1683,65 |
| 46,4 | 2152,96 | 99 897,344 | 6,8118 | 3,5934 | 145,77 | 1690,93 |
| 46,5 | 2162,25 | 100 544,625 | 6,8191 | 3,5960 | 146,08 | 1698,23 |
| 46,6 | 2171,56 | 101 194,696 | 6,8264 | 3,5986 | 146,40 | 1705,54 |
| 46,7 | 2180,89 | 101 847,563 | 6,8337 | 3,6011 | 146,71 | 1712,87 |
| 46,8 | 2190,24 | 102 503,232 | 6,8411 | 3,6037 | 147,03 | 1720,21 |
| 46,9 | 2199,61 | 103 161,709 | 6,8484 | 3,6063 | 147,34 | 1727,57 |
| **47,0** | 2209,00 | 103 823,000 | 6,8557 | 3,6088 | 147,65 | 1734,94 |
| 47,1 | 2218,41 | 104 487,111 | 6,8629 | 3,6114 | 147,97 | 1742,34 |
| 47,2 | 2227,84 | 105 154,048 | 6,8702 | 3,6139 | 148,28 | 1749,74 |
| 47,3 | 2237,29 | 105 823,817 | 6,8775 | 3,6165 | 148,60 | 1757,16 |
| 47,4 | 2246,76 | 106 496,424 | 6,8848 | 3,6190 | 148,91 | 1764,60 |
| 47,5 | 2256,25 | 107 171,875 | 6,8920 | 3,6216 | 149,23 | 1772,05 |
| 47,6 | 2265,76 | 107 850,176 | 6,8993 | 3,6241 | 149,54 | 1779,52 |
| 47,7 | 2275,29 | 108 531,333 | 6,9065 | 3,6267 | 149,85 | 1787,01 |
| 47,8 | 2284,84 | 109 215,352 | 6,9138 | 3,6292 | 150,17 | 1794,51 |
| 47,9 | 2294,41 | 109 902,239 | 6,9209 | 3,6317 | 150,48 | 1802,03 |
| **48,0** | 2304,00 | 110 592,000 | 6,9282 | 3,6342 | 150,80 | 1809,56 |
| 48,1 | 2313,61 | 111 284,641 | 6,9354 | 3,6368 | 151,11 | 1817,11 |
| 48,2 | 2323,24 | 111 980,168 | 6,9426 | 3,6393 | 151,42 | 1824,67 |
| 48,3 | 2332,89 | 112 678,587 | 6,9498 | 3,6418 | 151,74 | 1832,25 |
| 48,4 | 2342,56 | 113 379,904 | 6,9570 | 3,6443 | 152,05 | 1839,84 |
| 48,5 | 2352,25 | 114 084,125 | 6,9642 | 3,6468 | 152,37 | 1847,45 |
| 48,6 | 2361,96 | 114 791,256 | 6,9714 | 3,6493 | 152,68 | 1855,08 |
| 48,7 | 2371,69 | 115 501,303 | 6,9785 | 3,6518 | 153,00 | 1862,72 |
| 48,8 | 2381,44 | 116 214,272 | 6,9857 | 3,6543 | 153,31 | 1870,38 |
| 48,9 | 2391,21 | 116 930,169 | 6,9929 | 3,6568 | 153,62 | 1878,05 |
| **49,0** | 2401,00 | 117 649,000 | 7,0000 | 3,6593 | 153,94 | 1885,74 |
| 49,1 | 2410,81 | 118 370,771 | 7,0071 | 3,6618 | 154,25 | 1893,45 |
| 49,2 | 2420,64 | 119 095 488 | 7,0143 | 3,6643 | 154,57 | 1901,17 |
| 49,3 | 2430,49 | 119 823,157 | 7,0214 | 3,6668 | 154,88 | 1908,90 |
| 49,4 | 2440,36 | 120 553,784 | 7,0285 | 3,6692 | 155,19 | 1916,65 |
| 49,5 | 2450,25 | 121 287,375 | 7,0356 | 3,6717 | 155,51 | 1924,42 |
| 49,6 | 2460,16 | 122 023,936 | 7,0427 | 3,6742 | 155,82 | 1932,31 |
| 49,7 | 2470,09 | 122 763,473 | 7,0498 | 3,6767 | 156,14 | 1940,00 |
| 49,8 | 2480,04 | 123 505,992 | 7,0569 | 3,6791 | 156,45 | 1947,82 |
| 49,9 | 2490,01 | 124 251,499 | 7,0640 | 3,6816 | 156,77 | 1955,65 |
| **50,0** | 2500,00 | 125 000,000 | 7,0711 | 3,6840 | 157,08 | 1963,50 |

50—55

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **50,0** | 2500,00 | 125 000,000 | 7,0711 | 3,6840 | 157,08 | 1963,50 |
| 50,1 | 2510,01 | 125 751,501 | 7,0781 | 3,6865 | 157,39 | 1971,36 |
| 50,2 | 2520,04 | 126 506,008 | 7,0852 | 3,6889 | 157,71 | 1979,23 |
| 50,3 | 2530,09 | 127 263,527 | 7,0922 | 3,6914 | 158,02 | 1987,13 |
| 50,4 | 2540,16 | 128 024,064 | 7,0993 | 3,6938 | 158,34 | 1995,04 |
| 50,5 | 2550,25 | 128 787,625 | 7,1063 | 3,6963 | 158,65 | 2002,96 |
| 50,6 | 2560,36 | 129 554,216 | 7,1134 | 3,6987 | 158,96 | 2010,90 |
| 50,7 | 2570,49 | 130 323,843 | 7,1204 | 3,7011 | 159,28 | 2018,86 |
| 50,8 | 2580,64 | 131 096,512 | 7,1274 | 3,7036 | 159,59 | 2026,83 |
| 50,9 | 2590,81 | 131 872,229 | 7,1344 | 3,7060 | 159,91 | 2034,82 |
| **51,0** | 2601,00 | 132 651,000 | 7,1414 | 3,7084 | 160,22 | 2042,82 |
| 51,1 | 2611,21 | 133 432,831 | 7,1484 | 3,7109 | 160,54 | 2050,84 |
| 51,2 | 2621,44 | 134 217,728 | 7,1554 | 3,7133 | 160,85 | 2058,87 |
| 51,3 | 2631,69 | 135 005,697 | 7,1624 | 3,7157 | 161,16 | 2066,92 |
| 51,4 | 2641,96 | 135 796,744 | 7,1694 | 3,7181 | 161,48 | 2074,99 |
| 51,5 | 2652,25 | 136 590,875 | 7,1764 | 3,7205 | 161,79 | 2083,07 |
| 51,6 | 2662,56 | 137 388,096 | 7,1833 | 3,7229 | 162,11 | 2091,17 |
| 51,7 | 2672,89 | 138 188,413 | 7,1903 | 3,7253 | 162,42 | 2099,28 |
| 51,8 | 2683,24 | 138 991,832 | 7,1972 | 3,7277 | 162,73 | 2107,41 |
| 51,9 | 2693,61 | 139 798,359 | 7,2042 | 3,7301 | 163,05 | 2115,56 |
| **52,0** | 2704,00 | 140 608,000 | 7,2111 | 3,7325 | 163,36 | 2123,72 |
| 52,1 | 2714,41 | 141 420,761 | 7,2180 | 3,7349 | 163,68 | 2131,89 |
| 52,2 | 2724,84 | 142 236,648 | 7,2250 | 3,7373 | 163,99 | 2140,08 |
| 52,3 | 2735,29 | 143 055,667 | 7,2319 | 3,7397 | 164,31 | 2148,29 |
| 52,4 | 2745,76 | 143 877,824 | 7,2388 | 3,7421 | 164,62 | 2156,51 |
| 52,5 | 2756,25 | 144 703,125 | 7,2457 | 3,7444 | 164,93 | 2164,75 |
| 52,6 | 2766,76 | 145 531,576 | 7,2526 | 3,7468 | 165,25 | 2173,01 |
| 52,7 | 2777,29 | 146 363,183 | 7,2595 | 3,7492 | 165,56 | 2181,28 |
| 52,8 | 2787,84 | 147 197,952 | 7,2664 | 3,7516 | 165,88 | 2189,56 |
| 52,9 | 2798,41 | 148 035,889 | 7,2732 | 3,7539 | 166,19 | 2197,87 |
| **53,0** | 2809,00 | 148 877,000 | 7,2801 | 3,7563 | 166,50 | 2206,18 |
| 53,1 | 2819,61 | 149 721,291 | 7,2870 | 3,7586 | 166,82 | 2214,52 |
| 53,2 | 2830,24 | 150 568,768 | 7,2938 | 3,7610 | 167,13 | 2222,87 |
| 53,3 | 2840,89 | 151 419,437 | 7,3007 | 3,7634 | 167,45 | 2231,23 |
| 53,4 | 2851,56 | 152 273,304 | 7,3075 | 3,7657 | 167,76 | 2239,61 |
| 53,5 | 2862,25 | 153 130,375 | 7,3144 | 3,7681 | 168,08 | 2248,01 |
| 53,6 | 2872,96 | 153 990,656 | 7,3212 | 3,7704 | 168,39 | 2256,42 |
| 53,7 | 2883,69 | 154 854,153 | 7,3280 | 3,7728 | 168,70 | 2264,84 |
| 53,8 | 2894,44 | 155 720,872 | 7,3348 | 3,7751 | 169,02 | 2273,29 |
| 53,9 | 2905,21 | 156 590,819 | 7,3417 | 3,7774 | 169,33 | 2281,75 |
| **54,0** | 2916,00 | 157 464,000 | 7,3485 | 3,7798 | 169,65 | 2290,22 |
| 54,1 | 2926,81 | 158 340,421 | 7,3553 | 3,7821 | 169,96 | 2298,71 |
| 54,2 | 2937,64 | 159 220,088 | 7,3621 | 3,7844 | 170,27 | 2307,22 |
| 54,3 | 2948,49 | 160 103,007 | 7,3689 | 3,7868 | 170,59 | 2315,74 |
| 54,4 | 2959,36 | 160 989,184 | 7,3756 | 3,7891 | 170,90 | 2324,28 |
| 54,5 | 2970,25 | 161 878,625 | 7,3824 | 3,7914 | 171,22 | 2332,83 |
| 54,6 | 2981,16 | 162 771,336 | 7,3892 | 3,7937 | 171,53 | 2341,40 |
| 54,7 | 2992,09 | 163 667,323 | 7,3959 | 3,7960 | 171,85 | 2349,98 |
| 54,8 | 3003,04 | 164 566,592 | 7,4027 | 3,7983 | 172,16 | 2358,58 |
| 54,9 | 3014,01 | 165 469,149 | 7,4095 | 3,8006 | 172,47 | 2367,20 |
| **55,0** | 3025,00 | 166 375,000 | 7,4162 | 3,8030 | 172,79 | 2375,83 |

55—60

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **55,0** | 3025,00 | 166 375,000 | 7,4162 | 3,8030 | 172,79 | 2375,83 |
| 55,1 | 3036,01 | 167 284,151 | 7,4229 | 3,8053 | 173,10 | 2384,48 |
| 55,2 | 3047,04 | 168 196,608 | 7,4297 | 3,8076 | 173,42 | 2393,14 |
| 55,3 | 3058,09 | 169 112,377 | 7,4364 | 3,8099 | 173,73 | 2401,82 |
| 55,4 | 3069,16 | 170 031,464 | 7,4431 | 3,8121 | 174,04 | 2410,41 |
| 55,5 | 3080,25 | 170 953,875 | 7,4498 | 3,8144 | 174,36 | 2419,22 |
| 55,6 | 3091,36 | 171 879,616 | 7,4565 | 3,8167 | 174,67 | 2427,95 |
| 55,7 | 3102,49 | 172 808,693 | 7,4632 | 3,8190 | 174,99 | 2436,69 |
| 55,8 | 3113,64 | 173 741,112 | 7,4699 | 3,8213 | 175,30 | 2445,45 |
| 55,9 | 3124,81 | 174 676,879 | 7,4766 | 3,8236 | 175,62 | 2454,22 |
| **56,0** | 3136,00 | 175 616,000 | 7,4833 | 3,8259 | 175,93 | 2463,01 |
| 56,1 | 3147,21 | 176 558,481 | 7,4900 | 3,8281 | 176,24 | 2471,81 |
| 56,2 | 3158,44 | 177 504,328 | 7,4967 | 3,8304 | 176,56 | 2480,63 |
| 56,3 | 3169,69 | 178 453,547 | 7,5033 | 3,8327 | 176,87 | 2489,47 |
| 56,4 | 3180,96 | 179 406,144 | 7,5100 | 3,8349 | 177,19 | 2498,32 |
| 56,5 | 3192,25 | 180 362,125 | 7,5166 | 3,8372 | 177,50 | 2507,19 |
| 56,6 | 3203,56 | 181 321,496 | 7,5233 | 3,8395 | 177,81 | 2516,07 |
| 56,7 | 3214,89 | 182 284,263 | 7,5299 | 3,8417 | 178,13 | 2524,97 |
| 56,8 | 3226,24 | 183 250,432 | 7,5366 | 3,8440 | 178,44 | 2533,88 |
| 56,9 | 3237,61 | 184 220,009 | 7,5432 | 3,8462 | 178,76 | 2542,81 |
| **57,0** | 3249,00 | 185 193,000 | 7,5498 | 3,8485 | 179,07 | 2551,76 |
| 57,1 | 3260,41 | 186 169,411 | 7,5565 | 3,8508 | 179,38 | 2560,72 |
| 57,2 | 3271,84 | 187 149,218 | 7,5631 | 3,8530 | 179,70 | 2569,70 |
| 57,3 | 3283,29 | 188 132,517 | 7,5697 | 3,8552 | 180,01 | 2578,69 |
| 57,4 | 3294,76 | 189 119,224 | 7,5763 | 3,8575 | 180,33 | 2587,70 |
| 57,5 | 3306,25 | 190 109,375 | 7,5829 | 3,8597 | 180,64 | 2596,72 |
| 57,6 | 3317,76 | 191 102,976 | 7,5895 | 3,8620 | 180,96 | 2605,76 |
| 57,7 | 3329,29 | 192 100,033 | 7,5961 | 3,8642 | 181,27 | 2614,82 |
| 57,8 | 3340,84 | 193 100,552 | 7,6026 | 3,8664 | 181,58 | 2623,89 |
| 57,9 | 3352,41 | 194 104,539 | 7,6092 | 3,8687 | 181,90 | 2632,98 |
| **58,0** | 3364,00 | 195 112,000 | 7,6158 | 3,8709 | 182,21 | 2642,08 |
| 58,1 | 3375,61 | 196 122,941 | 7,6223 | 3,8731 | 182,53 | 2651,20 |
| 58,2 | 3387,24 | 197 137,368 | 7,6289 | 3,8753 | 182,84 | 2660,33 |
| 58,3 | 3398,89 | 198 155,287 | 7,6354 | 3,8775 | 183,15 | 2669,48 |
| 58,4 | 3410,56 | 199 176,704 | 7,6420 | 3,8798 | 183,47 | 2678,65 |
| 58,5 | 3422,25 | 200 201,625 | 7,6485 | 3,8820 | 183,78 | 2687,83 |
| 58,6 | 3433,96 | 201 230,056 | 7,6551 | 3,8842 | 184,10 | 2697,03 |
| 58,7 | 3445,69 | 202 262,003 | 7,6616 | 3,8864 | 184,41 | 2706,24 |
| 58,8 | 3457,44 | 203 297,472 | 7,6681 | 3,8886 | 184,73 | 2715,47 |
| 58,9 | 3469,21 | 204 336,469 | 7,6746 | 3,8908 | 185,04 | 2724,71 |
| **59,0** | 3481,00 | 205 379,000 | 7,6811 | 3,8930 | 185,35 | 2733,97 |
| 59,1 | 3492,81 | 206 425,071 | 7,6877 | 3,8952 | 185,67 | 2743,25 |
| 59,2 | 3504,64 | 207 474,688 | 7,6942 | 3,8974 | 185,98 | 2752,54 |
| 59,3 | 3516,49 | 208 527,857 | 7,7006 | 3,8996 | 186,30 | 2761,84 |
| 59,4 | 3528,36 | 209 584,584 | 7,7071 | 3,9018 | 186,61 | 2771,17 |
| 59,5 | 3540,25 | 210 644,875 | 7,7136 | 3,9040 | 186,92 | 2780,51 |
| 59,6 | 3552,16 | 211 708,736 | 7,7201 | 3,9061 | 187,24 | 2789,86 |
| 59,7 | 3564,09 | 212 776,173 | 7,7266 | 3,9083 | 187,55 | 2799,23 |
| 59,8 | 3576,04 | 213 847,192 | 7,7330 | 3,9105 | 187,87 | 2808,62 |
| 59,9 | 3588,01 | 214 921,799 | 7,7395 | 3,9127 | 188,18 | 2818,02 |
| **60,0** | 3600,00 | 216 000,000 | 7,7460 | 3,9149 | 188,50 | 2827,43 |

60—65

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **60,0** | 3600,00 | 216 000,000 | 7,7460 | 3,9149 | 188,50 | 2827,43 |
| 60,1 | 3612,01 | 217 081,801 | 7,7524 | 3,9170 | 188,81 | 2836,87 |
| 60,2 | 3624,04 | 218 167,208 | 7,7589 | 3,9192 | 189,12 | 2846,31 |
| 60,3 | 3636,09 | 219 256,227 | 7,7653 | 3,9214 | 189,44 | 2855,78 |
| 60,4 | 3648,16 | 220 348,864 | 7,7717 | 3,9235 | 189,75 | 2865,26 |
| 60,5 | 3660,25 | 221 445,125 | 7,7782 | 3,9257 | 190,07 | 2874,75 |
| 60,6 | 3672,36 | 222 545,016 | 7,7846 | 3,9279 | 190,38 | 2884,26 |
| 60,7 | 3684,49 | 223 648,543 | 7,7910 | 3,9300 | 190,69 | 2893,79 |
| 60,8 | 3696,64 | 224 755,712 | 7,7974 | 3,9322 | 191,01 | 2903,33 |
| 60,9 | 3708,81 | 225 866,529 | 7,8038 | 3,9343 | 191,32 | 2912,89 |
| **61,0** | 3721,00 | 226 981,000 | 7,8102 | 3,9365 | 191,64 | 2922,47 |
| 61,1 | 3733,21 | 228 099,131 | 7,8166 | 3,9386 | 191,95 | 2932,06 |
| 61,2 | 3745,44 | 229 220,928 | 7,8230 | 3,9408 | 192,27 | 2941,66 |
| 61,3 | 3757,69 | 230 346,397 | 7,8294 | 3,9429 | 192,58 | 2951,28 |
| 61,4 | 3769,96 | 231 475,544 | 7,8358 | 3,9451 | 192,89 | 2960,92 |
| 61,5 | 3782,25 | 232 608,375 | 7,8422 | 3,9472 | 193,21 | 2970,57 |
| 61,6 | 3794,56 | 233 744,896 | 7,8486 | 3,9494 | 193,52 | 2980,24 |
| 61,7 | 3806,89 | 234 885,113 | 7,8549 | 3,9515 | 193,84 | 2989,92 |
| 61,8 | 3819,24 | 236 029,032 | 7,8613 | 3,9536 | 194,15 | 2999,62 |
| 61,9 | 3831,61 | 237 176,659 | 7,8677 | 3,9558 | 194,46 | 3009,34 |
| **62,0** | 3844,00 | 238 328,000 | 7,8740 | 3,9579 | 194,78 | 3019,07 |
| 62,1 | 3856,41 | 239 483,061 | 7,8804 | 3,9600 | 195,09 | 3028,82 |
| 62,2 | 3868,84 | 240 641,848 | 7,8867 | 3,9621 | 195,41 | 3038,58 |
| 62,3 | 3881,29 | 241 804,367 | 7,8930 | 3,9643 | 195,72 | 3048,36 |
| 62,4 | 3893,76 | 242 970,624 | 7,8994 | 3,9664 | 196,04 | 3058,15 |
| 62,5 | 3906,25 | 244 140,625 | 7,9057 | 3,9685 | 196,35 | 3067,96 |
| 62,6 | 3918,76 | 245 314,376 | 7,9120 | 3,9706 | 196,66 | 3077,79 |
| 62,7 | 3931,29 | 246 491,883 | 7,9183 | 3,9727 | 196,98 | 3087,63 |
| 62,8 | 3943,84 | 247 673,152 | 7,9246 | 3,9748 | 197,29 | 3097,48 |
| 62,9 | 3956,41 | 248 858,189 | 7,9310 | 3,9770 | 197,61 | 3107,36 |
| **63,0** | 3969,00 | 250 047,000 | 7,9373 | 3,9791 | 197,92 | 3117,25 |
| 63,1 | 3981,61 | 251 239,591 | 7,9436 | 3,9812 | 198,23 | 3127,15 |
| 63,2 | 3994,24 | 252 435,968 | 7,9498 | 3,9833 | 198,55 | 3137,07 |
| 63,3 | 4006,89 | 253 636,137 | 7,9561 | 3,9854 | 198,86 | 3147,00 |
| 63,4 | 4019,56 | 254 840,104 | 7,9624 | 3,9875 | 199,18 | 3156,96 |
| 63,5 | 4032,25 | 256 047,875 | 7,9687 | 3,9896 | 199,49 | 3166,92 |
| 63,6 | 4044,96 | 257 259,456 | 7,9750 | 3,9916 | 199,81 | 3176,90 |
| 63,7 | 4057,69 | 258 474,853 | 7,9812 | 3,9937 | 200,12 | 3186,90 |
| 63,8 | 4070,44 | 259 694,072 | 7,9875 | 3,9958 | 200,43 | 3196,92 |
| 63,9 | 4083,21 | 260 917,119 | 7,9937 | 3,9979 | 200,75 | 3206,95 |
| **64,0** | 4096,00 | 262 144,000 | 8,0000 | 4,0000 | 201,06 | 3216,99 |
| 64,1 | 4108,81 | 263 374,721 | 8,0062 | 4,0021 | 201,38 | 3227,05 |
| 64,2 | 4121,64 | 264 609,288 | 8,0125 | 4,0042 | 201,69 | 3237,13 |
| 64,3 | 4134,49 | 265 847,707 | 8,0187 | 4,0062 | 202,00 | 3247,22 |
| 64,4 | 4147,36 | 267 089,984 | 8,0250 | 4,0083 | 202,32 | 3257,33 |
| 64,5 | 4160,25 | 268 336,125 | 8,0312 | 4,0104 | 202,63 | 3267,45 |
| 64,6 | 4173,16 | 269 586,136 | 8,0374 | 4,0125 | 202,95 | 3277,59 |
| 64,7 | 4186,09 | 270 840,023 | 8,0436 | 4,0145 | 203,26 | 3287,75 |
| 64,8 | 4199,04 | 272 097,792 | 8,0498 | 4,0166 | 203,58 | 3297,92 |
| 64,9 | 4212,01 | 273 359,449 | 8,0561 | 4,0187 | 203,89 | 3308,10 |
| **65,0** | 4225,00 | 274 625,000 | 8,0623 | 4,0207 | 204,20 | 3318,31 |

65—70

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **65,0** | 4225,00 | 274 625,000 | 8,0623 | 4,0207 | 204,20 | 3318,31 |
| 65,1 | 4238,01 | 275 894,451 | 8,0685 | 4,0228 | 204,52 | 3328,53 |
| 65,2 | 4251,04 | 277 167,808 | 8,0747 | 4,0248 | 204,83 | 3338,76 |
| 65,3 | 4264,09 | 278 445,077 | 8,0808 | 4,0269 | 205,15 | 3349,01 |
| 65,4 | 4277,16 | 279 726,264 | 8,0870 | 4,0290 | 205,46 | 3359,27 |
| 65,5 | 4290,25 | 281 011,375 | 8,0932 | 4,0310 | 205,78 | 3369,55 |
| 65,6 | 4303,36 | 282 300,416 | 8,0994 | 4,0331 | 206,09 | 3379,85 |
| 65,7 | 4316,49 | 283 593,393 | 8,1056 | 4,0351 | 206,40 | 3390,16 |
| 65,8 | 4329,64 | 284 890,312 | 8,1117 | 4,0372 | 206,72 | 3400,49 |
| 65,9 | 4342,81 | 286 191,179 | 8,1179 | 4,0392 | 207,03 | 3410,83 |
| **66,0** | 4356,00 | 287 496,000 | 8,1240 | 4,0412 | 207,35 | 3421,19 |
| 66,1 | 4369,21 | 288 804,781 | 8,1302 | 4,0433 | 207,66 | 3431,57 |
| 66,2 | 4382,44 | 290 117,528 | 8,1363 | 4,0453 | 207,97 | 3441,96 |
| 66,3 | 4395,69 | 291 434,247 | 8,1425 | 4,0474 | 208,29 | 3452,37 |
| 66,4 | 4408,96 | 292 754,944 | 8,1486 | 4,0494 | 208,60 | 3462,79 |
| 66,5 | 4422,25 | 294 079,625 | 8,1548 | 4,0514 | 208,92 | 3473,23 |
| 66,6 | 4435,56 | 295 408,296 | 8,1609 | 4,0534 | 209,23 | 3483,68 |
| 66,7 | 4448,89 | 296 740,963 | 8,1670 | 4,0555 | 209,54 | 3494,15 |
| 66,8 | 4462,24 | 298 077,632 | 8,1731 | 4,0575 | 209,86 | 3504,64 |
| 66,9 | 4475,61 | 299 418,309 | 8,1792 | 4,0595 | 210,17 | 3515,14 |
| **67,0** | 4489,00 | 300 763,000 | 8,1854 | 4,0615 | 210,49 | 3525,65 |
| 67,1 | 4502,41 | 302 111,711 | 8,1915 | 4,0636 | 210,80 | 3536,18 |
| 67,2 | 4515,84 | 303 464,448 | 8,1976 | 4,0656 | 211,12 | 3546,73 |
| 67,3 | 4529,29 | 304 821,217 | 8,2037 | 4,0676 | 211,43 | 3557,30 |
| 67,4 | 4542,76 | 306 182,024 | 8,2098 | 4,0696 | 211,74 | 3567,88 |
| 67,5 | 4556,25 | 307 546,875 | 8,2158 | 4,0716 | 212,06 | 3578,47 |
| 67,6 | 4569,76 | 308 915,776 | 8,2219 | 4,0736 | 212,37 | 3589,08 |
| 67,7 | 4583,29 | 310 288,733 | 8,2280 | 4,0756 | 212,69 | 3599,71 |
| 67,8 | 4596,84 | 311 665,752 | 8,2341 | 4,0776 | 213,00 | 3610,35 |
| 67,9 | 4610,41 | 313 046,839 | 8,2401 | 4,0797 | 213,51 | 3621,01 |
| **68,0** | 4624,00 | 314 432,000 | 8,2462 | 4,0817 | 213,63 | 3631,68 |
| 68,1 | 4637,61 | 315 821,241 | 8,2523 | 4,0837 | 213,94 | 3642,37 |
| 68,2 | 4651,24 | 317 214,568 | 8,2583 | 4,0857 | 214,26 | 3653,08 |
| 68,3 | 4664,89 | 318 611,987 | 8,2644 | 4,0877 | 214,57 | 3663,80 |
| 68,4 | 4678,56 | 320 013,504 | 8,2704 | 4,0896 | 214,88 | 3674,53 |
| 68,5 | 4692,25 | 321 419,125 | 8,2765 | 4,0916 | 215,20 | 3685,28 |
| 68,6 | 4705,96 | 322 828,856 | 8,2825 | 4,0936 | 215,51 | 3696,05 |
| 68,7 | 4719,69 | 324 242,703 | 8,2885 | 4,0956 | 215,83 | 3706,84 |
| 68,8 | 4733,44 | 325 660,672 | 8,2946 | 4,0976 | 216,14 | 3717,64 |
| 68,9 | 4747,21 | 327 082,769 | 8,3006 | 4,0996 | 216,46 | 3728,45 |
| **69,0** | 4761,00 | 328 509,000 | 8,3066 | 4,1016 | 216,77 | 3739,28 |
| 69,1 | 4774,81 | 329 939,371 | 8,3126 | 4,1035 | 217,08 | 3750,13 |
| 69,2 | 4788,64 | 331 373,888 | 8,3187 | 4,1055 | 217,40 | 3760,99 |
| 69,3 | 4802,49 | 332 812,557 | 8,3247 | 4,1075 | 217,71 | 3771,87 |
| 69,4 | 4816,36 | 334 255,384 | 8,3307 | 4,1095 | 218,03 | 3782,76 |
| 69,5 | 4830,25 | 335 702,375 | 8,3367 | 4,1114 | 218,34 | 3793,67 |
| 69,6 | 4844,16 | 337 153,536 | 8,3427 | 4,1134 | 218,65 | 3804,59 |
| 69,7 | 4858,09 | 338 608,873 | 8,3487 | 4,1154 | 218,97 | 3815,53 |
| 69,8 | 4872,04 | 340 068,392 | 8,3546 | 4,1174 | 219,28 | 3826,49 |
| 69,9 | 4886,01 | 341 532,099 | 8,3606 | 4,1193 | 219,60 | 3837,46 |
| **70,0** | 4900,00 | 343 000,000 | 8,3666 | 4,1213 | 219,91 | 3848,45 |

70—75

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2 \pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **70,0** | 4900,00 | 343 000,000 | 8,3666 | 4,1213 | 219,91 | 3848,45 |
| 70,1 | 4914,01 | 344 472,101 | 8,3726 | 4,1232 | 220,23 | 3859,45 |
| 70,2 | 4928,04 | 345 948,408 | 8,3785 | 4,1252 | 220,54 | 3870,47 |
| 70,3 | 4942,09 | 347 428,927 | 8,3845 | 4,1272 | 220,85 | 3881,51 |
| 70,4 | 4957,16 | 348 913,664 | 8,3905 | 4,1291 | 221,17 | 3892,56 |
| 70,5 | 4970,25 | 350 402,625 | 8,3964 | 4,1311 | 221,48 | 3903,63 |
| 70,6 | 4984,36 | 351 895,816 | 8,4024 | 4,1330 | 221,80 | 3914,71 |
| 70,7 | 4989,49 | 353 393,243 | 8,4083 | 4,1350 | 222,11 | 3925,80 |
| 70,8 | 5012,64 | 354 894,912 | 8,4143 | 4,1369 | 222,42 | 3936,92 |
| 70,9 | 5026,81 | 356 400,829 | 8,4202 | 4,1389 | 222,74 | 3948,05 |
| **71,0** | 5041,00 | 357 911,000 | 8,4261 | 4,1408 | 223,05 | 3959,19 |
| 71,1 | 5055,21 | 359 425,431 | 8,4321 | 4,1428 | 223,37 | 3970,35 |
| 71,2 | 5069,44 | 360 944,128 | 8,4380 | 4,1447 | 223,68 | 3981,53 |
| 71,3 | 5083,69 | 362 467,097 | 8,4439 | 4,1466 | 224,00 | 3992,72 |
| 71,4 | 5097,96 | 363 994,344 | 8,4499 | 4,1486 | 224,31 | 4003,93 |
| 71,5 | 5112,25 | 365 525,875 | 8,4558 | 4,1505 | 224,62 | 4015,15 |
| 71,6 | 5126,56 | 367 061,696 | 8,4617 | 4,1524 | 224,94 | 4026,39 |
| 71,7 | 5140,89 | 368 601,813 | 8,4676 | 4,1544 | 225,25 | 4037,65 |
| 71,8 | 5155,24 | 370 146,232 | 8,4735 | 4,1563 | 225,57 | 4048,92 |
| 71,9 | 5169,61 | 371 694,959 | 8,4794 | 4,1582 | 225,88 | 4060,20 |
| **72,0** | 5184,00 | 373 248,000 | 8,4853 | 4,1602 | 226,19 | 4071,50 |
| 72,1 | 5198,41 | 374 805,361 | 8,4912 | 4,1621 | 226,51 | 4082,82 |
| 72,2 | 5212,84 | 376 367,048 | 8,4971 | 4,1640 | 226,82 | 4094,15 |
| 72,3 | 5227,29 | 377 933,067 | 8,5029 | 4,1659 | 227,14 | 4105,50 |
| 72,4 | 5241,76 | 379 503,424 | 8,5088 | 4,1679 | 227,45 | 4116,87 |
| 72,5 | 5256,25 | 381 078,125 | 8,5147 | 4,1698 | 227,77 | 4128,25 |
| 72,6 | 5270,76 | 382 657,176 | 8,5206 | 4,1717 | 228,08 | 4139,65 |
| 72,7 | 5285,29 | 384 240,583 | 8,5264 | 4,1736 | 228,39 | 4151,06 |
| 72,8 | 5299,84 | 385 828,352 | 8,5323 | 4,1755 | 228,71 | 4162,48 |
| 72,9 | 5314,41 | 387 420,489 | 8,5381 | 4,1774 | 229,02 | 4173,93 |
| **73,0** | 5329,00 | 389 017,000 | 8,5440 | 4,1793 | 229,34 | 4185,39 |
| 73,1 | 5343,61 | 390 617,891 | 8,5499 | 4,1812 | 229,65 | 4196,86 |
| 73,2 | 5358,24 | 392 223,168 | 8,5557 | 4,1832 | 229,96 | 4208,35 |
| 73,3 | 5372,89 | 393 832,837 | 8,5615 | 4,1851 | 230,28 | 4219,86 |
| 73,4 | 5387,56 | 395 446,904 | 8,5674 | 4,1870 | 230,59 | 4231,38 |
| 73,5 | 5402,25 | 397 065,375 | 8,5732 | 4,1889 | 230,91 | 4242,92 |
| 73,6 | 5416,96 | 398 688,256 | 8,5790 | 4,1908 | 231,22 | 4254,47 |
| 73,7 | 5431,69 | 400 315,553 | 8,5849 | 4,1927 | 231,54 | 4266,04 |
| 73,8 | 5446,44 | 401 947,272 | 8,5907 | 4,1946 | 231,85 | 4277,62 |
| 73,9 | 5461,21 | 403 583,419 | 8,5965 | 4,1964 | 232,16 | 4289,22 |
| **74,0** | 5476,00 | 405 224,000 | 8,6023 | 4,1983 | 232,48 | 4300,84 |
| 74,1 | 5490,81 | 406 869,021 | 8,6081 | 4,2002 | 232,79 | 4312,47 |
| 74,2 | 5505,64 | 408 518,488 | 8,6139 | 4,2021 | 233,11 | 4324,22 |
| 74,3 | 5520,49 | 410 172,407 | 8,6197 | 4,2040 | 233,42 | 4335,78 |
| 74,4 | 5535,36 | 411 830,784 | 8,6255 | 4,2059 | 233,73 | 4347,46 |
| 74,5 | 5550,25 | 413 493,625 | 8,6313 | 4,2078 | 234,05 | 4359,16 |
| 74,6 | 5565,16 | 415 160,936 | 8,6371 | 4,2097 | 234,36 | 4370,87 |
| 74,7 | 5580,09 | 416 832,723 | 8,6429 | 4,2115 | 234,68 | 4382,59 |
| 74,8 | 5595,04 | 418 508,992 | 8,6487 | 4,2134 | 234,99 | 4394,33 |
| 74,9 | 5610,01 | 420 189,749 | 8,6545 | 4,2153 | 235,31 | 4406,09 |
| **75,0** | 5625,00 | 421 875,000 | 8,6603 | 4,2172 | 235,62 | 4417,86 |

75—80

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **75,0** | 5625,00 | 421 875,000 | 8,6603 | 4,2172 | 235,62 | 4417,86 |
| 75,1 | 5640,01 | 423 564,751 | 8,6660 | 4,2190 | 235,93 | 4429,65 |
| 75,2 | 5655,04 | 425 259,008 | 8,6718 | 4,2209 | 236,25 | 4441,46 |
| 75,3 | 5670,09 | 426 957,777 | 8,6776 | 4,2228 | 236,56 | 4453,28 |
| 75,4 | 5685,15 | 428 661,064 | 8,6833 | 4,2246 | 236,88 | 4465,11 |
| 75,5 | 5700,25 | 430 368,875 | 8,6891 | 4,2265 | 237,19 | 4476,97 |
| 75,6 | 5715,36 | 432 081,216 | 8,6948 | 4,2284 | 237,50 | 4488,83 |
| 75,7 | 5730,49 | 433 798,093 | 8,7006 | 4,2302 | 237,82 | 4500,72 |
| 75,8 | 5745,64 | 435 519,512 | 8,7063 | 4,2321 | 238,13 | 4512,62 |
| 75,9 | 5760,81 | 437 245,479 | 8,7121 | 4,2340 | 238,45 | 4524,53 |
| **76,0** | 5776,00 | 438 976,000 | 8,7178 | 4,2358 | 238,76 | 4536,46 |
| 76,1 | 5791,21 | 440 711,081 | 8,7235 | 4,2377 | 239,08 | 4548,41 |
| 76,2 | 5806,44 | 442 450,728 | 8,7293 | 4,2395 | 239,39 | 4560,37 |
| 76,3 | 5821,69 | 444 194,947 | 8,7350 | 4,2414 | 239,70 | 4572,34 |
| 76,4 | 5836,90 | 445 943,744 | 8,7407 | 4,2432 | 240,02 | 4584,34 |
| 76,5 | 5852,25 | 447 697,125 | 8,7464 | 4,2451 | 240,33 | 4596,35 |
| 76,6 | 5867,56 | 449 455,096 | 8,7521 | 4,2469 | 240,65 | 4608,37 |
| 76,7 | 5882,89 | 451 217,663 | 8,7579 | 4,2488 | 240,96 | 4620,41 |
| 76,8 | 5898,24 | 452 984,832 | 8,7636 | 4,2506 | 241,27 | 4632,47 |
| 76,9 | 5913,61 | 454 756,509 | 8,7693 | 4,2525 | 241,59 | 4644,54 |
| **77,0** | 5929,00 | 456 533,000 | 8,7750 | 4,2543 | 241,90 | 4656,63 |
| 77,1 | 5944,41 | 458 314,011 | 8,7807 | 4,2562 | 242,22 | 4668,73 |
| 77,2 | 5959,84 | 460 099,648 | 8,7864 | 4,2580 | 242,53 | 4680,85 |
| 77,3 | 5975,29 | 461 889,917 | 8,7920 | 4,2598 | 242,85 | 4692,98 |
| 77,4 | 5990,76 | 463 684,824 | 8,7977 | 4,2617 | 243,16 | 4705,13 |
| 77,5 | 6006,25 | 465 484,375 | 8,8034 | 4,2635 | 243,47 | 4717,30 |
| 77,6 | 6021,76 | 467 288,576 | 8,8091 | 4,2653 | 243,79 | 4729,48 |
| 77,7 | 6037,29 | 469 097,433 | 8,8148 | 4,2672 | 244,10 | 4741,68 |
| 77,8 | 6052,84 | 470 910,952 | 8,8204 | 4,2690 | 244,42 | 4753,89 |
| 77,9 | 6068,41 | 472 729,139 | 8,8261 | 4,2708 | 244,73 | 4766,12 |
| **78,0** | 6084,00 | 474 552,000 | 8,8318 | 4,2727 | 245,04 | 4778,36 |
| 78,1 | 6099,61 | 476 379,541 | 8,8374 | 4,2745 | 245,36 | 4790,62 |
| 78,2 | 6115,24 | 478 211,768 | 8,8431 | 4,2763 | 245,67 | 4802,90 |
| 78,3 | 6130,89 | 480 048,687 | 8,8487 | 4,2781 | 245,99 | 4815,19 |
| 78,4 | 6146,56 | 481 890,304 | 8,8544 | 4,2799 | 246,30 | 4827,50 |
| 78,5 | 6162,25 | 483 736,625 | 8,8600 | 4,2818 | 246,62 | 4839,82 |
| 78,6 | 6177,96 | 485 587,656 | 8,8657 | 4,2836 | 246,93 | 4852,16 |
| 78,7 | 6193,69 | 487 443,403 | 8,8713 | 4,2854 | 247,24 | 4864,51 |
| 78,8 | 6209,44 | 489 303,872 | 8,8769 | 4,2872 | 247,56 | 4876,88 |
| 78,9 | 6225,21 | 491 169,069 | 8,8826 | 4,2890 | 247,87 | 4889,27 |
| **79,0** | 6241,00 | 493 039,000 | 8,8882 | 4,2908 | 248,19 | 4901,67 |
| 79,1 | 6256,81 | 494 913,671 | 8,8938 | 4,2927 | 248,50 | 4914,09 |
| 79,2 | 6272,64 | 496 793,088 | 8,8994 | 4,2945 | 248,81 | 4926,52 |
| 79,3 | 6288,49 | 498 677,257 | 8,9051 | 4,2963 | 249,13 | 4938,97 |
| 79,4 | 6304,36 | 500 566,184 | 8,9107 | 4,2981 | 249,44 | 4951,43 |
| 79,5 | 6320,25 | 502 459,875 | 8,9163 | 4,2999 | 249,76 | 4963,91 |
| 79,6 | 6336,16 | 504 358,336 | 8,9219 | 4,3017 | 250,07 | 4976,41 |
| 79,7 | 6352,09 | 506 261,573 | 8,9275 | 4,3035 | 250,38 | 4988,92 |
| 79,8 | 6368,04 | 508 169,592 | 8,9331 | 4,3053 | 250,70 | 5001,45 |
| 79,9 | 6384,01 | 510 082,399 | 8,9387 | 4,3071 | 251,01 | 5013,99 |
| **80,0** | 6400,00 | 512 000,000 | 8,9443 | 4,3089 | 251,33 | 5026,55 |

80—85

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **80,0** | 6400,00 | 512 000,000 | 8,9443 | 4,3089 | 251,33 | 5026,55 |
| 80,1 | 6416,01 | 513 922,401 | 8,9499 | 4,3107 | 251,64 | 5039,12 |
| 80,2 | 6432,04 | 515 849,608 | 8,9554 | 4,3125 | 251,96 | 5051,71 |
| 80,3 | 6448,09 | 517 781,627 | 8,9610 | 4,3143 | 252,27 | 5064,32 |
| 80,4 | 6464,16 | 519 718,464 | 8,9666 | 4,3160 | 252,58 | 5076,94 |
| 80,5 | 6480,25 | 521 660,125 | 8,9722 | 4,3178 | 252,90 | 5089,58 |
| 80,6 | 6496,36 | 523 606,616 | 8,9778 | 4,3196 | 253,21 | 5102,23 |
| 80,7 | 6512,49 | 525 557,943 | 8,9833 | 4,3214 | 253,53 | 5114,90 |
| 80,8 | 6528,64 | 527 514,112 | 8,9889 | 4,3232 | 253,84 | 5127,58 |
| 80,9 | 6544,81 | 529 475,129 | 8,9944 | 4,3250 | 254,15 | 5140,28 |
| **81,0** | 6561,00 | 531 441,000 | 9,0000 | 4,3267 | 254,47 | 5153,00 |
| 81,1 | 6577,21 | 533 411,731 | 9,0056 | 4,3285 | 254,78 | 5165,73 |
| 81,2 | 6593,44 | 535 387,328 | 9,0111 | 4,3303 | 255,10 | 5178,48 |
| 81,3 | 6609,69 | 537 367,797 | 9,0167 | 4,3321 | 255,41 | 5191,24 |
| 81,4 | 6625,96 | 539 353,144 | 9,0222 | 4,3339 | 255,73 | 5204,02 |
| 81,5 | 6642,25 | 541 343,375 | 9,0277 | 4,3356 | 256,04 | 5216,81 |
| 81,6 | 6658,56 | 543 338,496 | 9,0333 | 4,3374 | 256,35 | 5229,62 |
| 81,7 | 6674,89 | 545 338,513 | 9,0388 | 4,3392 | 256,67 | 5242,45 |
| 81,8 | 6691,24 | 547 343,432 | 9,0443 | 4,3409 | 256,98 | 5255,29 |
| 81,9 | 6707,61 | 549 353,259 | 9,0499 | 4,3427 | 257,30 | 5268,14 |
| **82,0** | 6724,00 | 551 368,000 | 9,0554 | 4,3445 | 257,61 | 5281,02 |
| 82,1 | 6740,41 | 553 387,661 | 9,0609 | 4,3463 | 257,92 | 5293,91 |
| 82,2 | 6756,84 | 555 412,248 | 9,0664 | 4,3480 | 258,24 | 5306,81 |
| 82,3 | 6773,29 | 557 441,767 | 9,0719 | 4,3498 | 258,55 | 5319,73 |
| 82,4 | 6789,76 | 559 476,224 | 9,0774 | 4,3515 | 258,87 | 5332,67 |
| 82,5 | 6806,25 | 561 515,625 | 9,0830 | 4,3533 | 259,18 | 5345,62 |
| 82,6 | 6822,76 | 563 559,976 | 9,0885 | 4,3551 | 259,50 | 5358,58 |
| 82,7 | 6839,29 | 565 609,283 | 9,0940 | 4,3568 | 259,81 | 5371,57 |
| 82,8 | 6855,84 | 567 663,552 | 9,0995 | 4,3586 | 260,12 | 5384,56 |
| 82,9 | 6872,41 | 569 722,789 | 9,1049 | 4,3603 | 260,44 | 5397,58 |
| **83,0** | 6889,00 | 571 787,000 | 9,1104 | 4,3621 | 260,75 | 5410,61 |
| 83,1 | 6905,61 | 573 856,191 | 9,1159 | 4,3638 | 261,07 | 5423,65 |
| 83,2 | 6922,24 | 575 930,368 | 9,1214 | 4,3656 | 261,38 | 5436,71 |
| 83,3 | 6938,89 | 578 009,537 | 9,1269 | 4,3673 | 261,69 | 5449,79 |
| 83,4 | 6955,56 | 580 093,704 | 9,1324 | 4,3691 | 262,01 | 5462,88 |
| 83,5 | 6972,25 | 582 182,875 | 9,1378 | 4,3708 | 262,32 | 5475,99 |
| 83,6 | 6988,96 | 584 277,056 | 9,1433 | 4,3726 | 262,64 | 5489,12 |
| 83,7 | 7005,69 | 586 376,253 | 9,1488 | 4,3743 | 262,95 | 5502,26 |
| 83,8 | 7022,44 | 588 480,472 | 9,1542 | 4,3760 | 263,27 | 5515,41 |
| 83,9 | 7039,21 | 590 589,719 | 9,1597 | 4,3778 | 263,58 | 5528,58 |
| **84,0** | 7056,00 | 592 704,000 | 9,1652 | 4,3795 | 263,89 | 5541,77 |
| 84,1 | 7072,81 | 594 823,321 | 9,1706 | 4,3813 | 264,21 | 5554,97 |
| 84,2 | 7089,64 | 596 947,688 | 9,1761 | 4,3830 | 264,52 | 5568,19 |
| 84,3 | 7106,49 | 599 077,107 | 9,1815 | 4,3847 | 264,84 | 5581,42 |
| 84,4 | 7123,36 | 601 211,584 | 9,1869 | 4,3865 | 265,15 | 5594,67 |
| 84,5 | 7140,25 | 603 351,125 | 9,1924 | 4,3882 | 265,46 | 5607,94 |
| 84,6 | 7157,16 | 605 495,736 | 9,1978 | 4,3899 | 265,78 | 5621,22 |
| 84,7 | 7174,09 | 607 645,423 | 9,2033 | 4,3917 | 266,09 | 5634,52 |
| 84,8 | 7191,04 | 609 800,192 | 9,2087 | 4,3934 | 266,41 | 5647,83 |
| 84,9 | 7208,01 | 611 960,049 | 9,2141 | 4,3951 | 266,72 | 5661,16 |
| **85,0** | 7225,00 | 614 125,000 | 9,2195 | 4,3968 | 267,04 | 5674,50 |

85—90

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **85,0** | 7225,00 | 614 125,000 | 9,2195 | 4,3968 | 267,04 | 5674,50 |
| 85,1 | 7242,01 | 616 295,051 | 9,2250 | 4,3986 | 267,35 | 5687,86 |
| 85,2 | 7259,04 | 618 470,208 | 9,2304 | 4,4003 | 267,66 | 5701,24 |
| 85,3 | 7276,09 | 620 650,477 | 9,2358 | 4,4020 | 267,98 | 5714,63 |
| 85,4 | 7293,16 | 622 835,864 | 9,2412 | 4,4037 | 268,29 | 5728,03 |
| 85,5 | 7310,25 | 625 026,375 | 9,2466 | 4,4054 | 268,61 | 5741,46 |
| 85,6 | 7327,36 | 627 222,016 | 9,2520 | 4,4072 | 268,92 | 5754,90 |
| 85,7 | 7344,49 | 629 422,793 | 9,2574 | 4,4089 | 269,23 | 5768,35 |
| 85,8 | 7361,64 | 631 628,712 | 9,2628 | 4,4106 | 269,55 | 5781,82 |
| 85,9 | 7378,81 | 633 839,779 | 9,2682 | 4,4123 | 269,86 | 5795,30 |
| **86,0** | 7396,00 | 636 056,000 | 9,2736 | 4,4140 | 270,18 | 5808,80 |
| 86,1 | 7413,21 | 638 277,381 | 9,2790 | 4,4157 | 270,49 | 5822,32 |
| 86,2 | 7430,44 | 640 503,928 | 9,2844 | 4,4174 | 270,81 | 5835,85 |
| 86,3 | 7447,69 | 642 735,647 | 9,2898 | 4,4191 | 271,12 | 5849,40 |
| 86,4 | 7464,96 | 644 972,544 | 9,2952 | 4,4208 | 271,43 | 5862,97 |
| 86,5 | 7482,25 | 647 214,625 | 9,3005 | 4,4225 | 271,75 | 5876,55 |
| 86,6 | 7499,56 | 649 461,896 | 9,3059 | 4,4242 | 272,06 | 5890,14 |
| 86,7 | 7516,89 | 651 714,363 | 9,3113 | 4,4259 | 272,38 | 5903,75 |
| 86,8 | 7534,24 | 653 972,032 | 9,3167 | 4,4276 | 272,69 | 5917,38 |
| 86,9 | 7551,61 | 656 234,909 | 9,3220 | 4,4293 | 273,00 | 5931,02 |
| **87,0** | 7569,00 | 658 503,000 | 9,3274 | 4,4310 | 273,32 | 5944,68 |
| 87,1 | 7586,41 | 660 776,311 | 9,3327 | 4,4327 | 273,63 | 5958,35 |
| 87,2 | 7603,84 | 663 054,848 | 9,3381 | 4,4344 | 273,95 | 5972,04 |
| 87,3 | 7621,29 | 665 338,617 | 9,3434 | 4,4361 | 274,26 | 5985,75 |
| 87,4 | 7638,76 | 667 627,624 | 9,3488 | 4,4378 | 274,58 | 5999,47 |
| 87,5 | 7656,25 | 669 921,875 | 9,3541 | 4,4395 | 274,89 | 6013,20 |
| 87,6 | 7673,76 | 672 221,376 | 9,3595 | 4,4412 | 275,20 | 6026,96 |
| 87,7 | 7691,29 | 674 526,133 | 9,3648 | 4,4429 | 275,52 | 6040,73 |
| 87,8 | 7708,84 | 676 836,152 | 9,3702 | 4,4446 | 275,83 | 6054,51 |
| 87,9 | 7726,41 | 679 151,439 | 9,3755 | 4,4463 | 276,15 | 6068,31 |
| **88,0** | 7744,00 | 681 472,000 | 9,3808 | 4,4480 | 276,46 | 6082,12 |
| 88,1 | 7761,61 | 683 797,841 | 9,3862 | 4,4496 | 276,77 | 6095,95 |
| 88,2 | 7779,24 | 686 128,968 | 9,3915 | 4,4513 | 277,09 | 6109,80 |
| 88,3 | 7796,89 | 688 465,387 | 9,3968 | 4,4530 | 277,40 | 6123,66 |
| 88,4 | 7814,56 | 690 807,104 | 9,4021 | 4,4547 | 277,72 | 6137,54 |
| 88,5 | 7832,25 | 693 154,125 | 9,4074 | 4,4564 | 278,03 | 6151,43 |
| 88,6 | 7849,96 | 695 506,456 | 9,4128 | 4,4580 | 278,35 | 6165,34 |
| 88,7 | 7867,69 | 697 864,103 | 9,4181 | 4,4597 | 278,66 | 6179,27 |
| 88,8 | 7885,44 | 700 227,072 | 9,4234 | 4,4614 | 278,97 | 6193,21 |
| 88,9 | 7903,21 | 702 595,369 | 9,4287 | 4,4630 | 279,29 | 6207,17 |
| **89,0** | 7921,00 | 704 969,000 | 9,4340 | 4,4647 | 279,60 | 6221,14 |
| 89,1 | 7938,81 | 707 347,971 | 9,4393 | 4,4664 | 279,92 | 6235,13 |
| 89,2 | 7956,64 | 709 732,288 | 9,4446 | 4,4681 | 280,23 | 6249,13 |
| 89,3 | 7974,49 | 712 121,957 | 9,4499 | 4,4698 | 280,54 | 6263,15 |
| 89,4 | 7992,36 | 714 516,984 | 9,4552 | 4,4714 | 280,86 | 6277,18 |
| 89,5 | 8010,25 | 716 917,375 | 9,4604 | 4,4731 | 281,17 | 6291,24 |
| 89,6 | 8028,16 | 719 323,136 | 9,4657 | 4,4748 | 281,49 | 6305,30 |
| 89,7 | 8046,09 | 721 734,273 | 9,4710 | 4,4764 | 281,80 | 6319,38 |
| 89,8 | 8064,04 | 724 150,792 | 9,4763 | 4,4781 | 282,12 | 6333,48 |
| 89,9 | 8082,01 | 726 572,699 | 9,4816 | 4,4797 | 282,43 | 6347,60 |
| **90,0** | 8100,00 | 729 000,000 | 9,4868 | 4,4814 | 282,74 | 6361,73 |

90—95

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **90,0** | 8100,00 | 729 000,000 | 9,4868 | 4,4814 | 282,74 | 6361,73 |
| 90,1 | 8118,01 | 731 432,701 | 9,4921 | 4,4831 | 283,06 | 6375,87 |
| 90,2 | 8136,04 | 733 870,808 | 9,4974 | 4,4847 | 283,37 | 6390,03 |
| 90,3 | 8154,09 | 736 314,327 | 9,5026 | 4,4864 | 283,69 | 6404,21 |
| 90,4 | 8172,16 | 738 763,264 | 9,5079 | 4,4880 | 284,00 | 6418,40 |
| 90,5 | 8190,25 | 741 217,625 | 9,5131 | 4,4897 | 284,31 | 6432,61 |
| 90,6 | 8208,36 | 743 677,416 | 9,5184 | 4,4913 | 284,63 | 6446,83 |
| 90,7 | 8226,49 | 746 142,643 | 9,5237 | 4,4930 | 284,94 | 6461,07 |
| 90,8 | 8244,64 | 748 613,312 | 9,5289 | 4,4946 | 285,26 | 6475,33 |
| 90,9 | 8262,81 | 751 089,429 | 9,5341 | 4,4963 | 285,57 | 6489,60 |
| **91,0** | 8281,00 | 753 571,000 | 9,5394 | 4,4979 | 285,88 | 6503,88 |
| 91,1 | 8299,21 | 756 058,031 | 9,5446 | 4,4996 | 286,20 | 6518,18 |
| 91,2 | 8317,44 | 758 550,528 | 9,5499 | 4,5012 | 286,51 | 6532,50 |
| 91,3 | 8335,69 | 761 048,497 | 9,5551 | 4,5029 | 286,83 | 6546,84 |
| 91,4 | 8353,96 | 763 551,944 | 9,5603 | 4,5045 | 287,14 | 6561,18 |
| 91,5 | 8372,25 | 766 060,875 | 9,5656 | 4,5062 | 287,46 | 6575,55 |
| 91,6 | 8390,56 | 768 575,296 | 9,5708 | 4,5078 | 287,77 | 6589,93 |
| 91,7 | 8408,89 | 771 095,213 | 9,5760 | 4,5094 | 288,08 | 6604,33 |
| 91,8 | 8427,24 | 773 620,632 | 9,5812 | 4,5111 | 288,40 | 6618,74 |
| 91,9 | 8445,61 | 776,151,559 | 9,5864 | 4,5127 | 288,71 | 6633,17 |
| **92,0** | 8464,00 | 778 688,000 | 9,5917 | 4,5144 | 289,03 | 6647,61 |
| 92,1 | 8482,41 | 781 229,961 | 9,5969 | 4,5160 | 289,34 | 6662,07 |
| 92,2 | 8500,84 | 783 777,448 | 9,6021 | 4,5176 | 289,65 | 6676,54 |
| 92,3 | 8519,29 | 786 330,467 | 9,6073 | 4,5193 | 289,97 | 6691,03 |
| 92,4 | 8537,76 | 788 889,024 | 9,6125 | 4,5209 | 290,28 | 6705,54 |
| 92,5 | 8556,25 | 791 453,125 | 9,6177 | 4,5225 | 290,60 | 6720,06 |
| 92,6 | 8574,76 | 794 022,776 | 9,6229 | 4,5241 | 290,91 | 6734,60 |
| 92,7 | 8593,29 | 796 597,983 | 9,6281 | 4,5258 | 291,23 | 6749,15 |
| 92,8 | 8611,84 | 799 178,752 | 9,6333 | 4,5274 | 291,54 | 6763,72 |
| 92,9 | 8630,41 | 801 765,089 | 9,6385 | 4,5290 | 291,85 | 6778,31 |
| **93,0** | 8649,00 | 804 357,000 | 9,6437 | 4,5307 | 292,17 | 6792,91 |
| 93,1 | 8667,61 | 806 954,491 | 9,6488 | 4,5323 | 292,48 | 6807,52 |
| 93,2 | 8686,24 | 809 557,568 | 9,6540 | 4,5339 | 292,80 | 6822,16 |
| 93,3 | 8704,89 | 812 166,237 | 9,6592 | 4,5355 | 293,11 | 6836,80 |
| 93,4 | 8723,56 | 814 780,504 | 9,6644 | 4,5371 | 293,42 | 6851,47 |
| 93,5 | 8742,25 | 817 400,375 | 9,6695 | 4,5388 | 293,74 | 6866,15 |
| 93,6 | 8760,96 | 820 025,856 | 9,6747 | 4,5404 | 294,05 | 6880,84 |
| 93,7 | 8779,69 | 822 656,953 | 9,6799 | 4,5420 | 294,37 | 6895,55 |
| 93,8 | 8798,44 | 825 293,672 | 9,6850 | 4,5436 | 294,68 | 6910,28 |
| 93,9 | 8817,21 | 827 936,019 | 9,6902 | 4,5452 | 295,00 | 6925,02 |
| **94,0** | 8836,00 | 830 584,000 | 9,6954 | 4,5468 | 295,31 | 6939,78 |
| 94,1 | 8854,81 | 833 237,621 | 9,7005 | 4,5485 | 295,62 | 6954,55 |
| 94,2 | 8873,64 | 835 896,888 | 9,7057 | 4,5501 | 295,94 | 6969,34 |
| 94,3 | 8892,49 | 838 561,807 | 9,7108 | 4,5517 | 296,25 | 6984,15 |
| 94,4 | 8911,36 | 841 232,384 | 9,7160 | 4,5533 | 296,57 | 6998,97 |
| 94,5 | 8930,25 | 843 908,625 | 9,7211 | 4,5549 | 296,88 | 7013,80 |
| 94,6 | 8949,16 | 846 590,536 | 9,7263 | 4,5565 | 297,19 | 7028,65 |
| 94,7 | 8968,09 | 849 278,123 | 9,7314 | 4,5581 | 297,51 | 7043,52 |
| 94,8 | 8987,04 | 851 971,392 | 9,7365 | 4,5597 | 297,82 | 7058,40 |
| 94,9 | 9006,01 | 854 670,349 | 9,7417 | 4,5613 | 298,14 | 7073,30 |
| **95,0** | 9025,00 | 857 375,000 | 9,7468 | 4,5629 | 298,45 | 7088,22 |

95—100

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $n \cdot \pi$ | $\frac{n^2\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **95,0** | 9025,00 | 857 375,000 | 9,7468 | 4,5629 | 298,45 | 7088,22 |
| 95,1 | 9044,01 | 860 085,351 | 9,7519 | 4,5645 | 298,77 | 7103,15 |
| 95,2 | 9063,04 | 862 801,408 | 9,7570 | 4,5661 | 299,08 | 7118,09 |
| 95,3 | 9082,09 | 865 523,177 | 9,7622 | 4,5677 | 299,39 | 7133,06 |
| 95,4 | 9101,16 | 868 250,664 | 9,7673 | 4,5693 | 299,71 | 7148,03 |
| 95,5 | 9120,25 | 870 983,875 | 9,7724 | 4,5709 | 300,02 | 7163,03 |
| 95,6 | 9139,36 | 873 722,816 | 9,7775 | 4,5725 | 300,34 | 7178,04 |
| 95,7 | 9158,49 | 876 467,493 | 9,7826 | 4,5741 | 300,65 | 7193,06 |
| 95,8 | 9177,64 | 879 217,912 | 9,7877 | 4,5757 | 300,96 | 7208,10 |
| 95,9 | 9196,81 | 881 974,079 | 9,7929 | 4,5773 | 301,28 | 7223,16 |
| **96,0** | 9216,00 | 884 736,000 | 9,7980 | 4,5789 | 301,59 | 7238,23 |
| 96,1 | 9235,21 | 887 503,681 | 9,8031 | 4,5804 | 301,91 | 7253,32 |
| 96,2 | 9254,44 | 890 277,128 | 9,8082 | 4,5820 | 302,22 | 7268,42 |
| 96,3 | 9273,69 | 893 056,347 | 9,8133 | 4,5836 | 302,54 | 7283,54 |
| 96,4 | 9292,96 | 895 841,344 | 9,8184 | 4,5852 | 302,85 | 7298,67 |
| 96,5 | 9312,25 | 898 632,125 | 9,8234 | 4,5868 | 303,16 | 7313,82 |
| 96,6 | 9331,56 | 901 428,696 | 9,8285 | 4,5884 | 303,48 | 7328,99 |
| 96,7 | 9350,89 | 904 231,063 | 9,8336 | 4,5900 | 303,79 | 7344,17 |
| 96,8 | 9370,24 | 907 039,232 | 9,8387 | 4,5915 | 304,11 | 7359,37 |
| 96,9 | 9389,61 | 909 853,209 | 8,8438 | 4,5931 | 304,42 | 7374,58 |
| **97,0** | 9409,00 | 912 673,000 | 9,8489 | 4,5947 | 304,73 | 7389,81 |
| 97,1 | 9428,41 | 915 498,611 | 9,8539 | 4,5963 | 305,05 | 7405,06 |
| 97,2 | 9447,84 | 918 330,048 | 9,8590 | 4,5979 | 305,36 | 7420,32 |
| 97,3 | 9467,29 | 921 167,317 | 9,8641 | 4,5994 | 305,68 | 7435,59 |
| 97,4 | 9486,76 | 924 010,424 | 9,8691 | 4,6010 | 305,99 | 7450,88 |
| 97,5 | 9506,25 | 926 859,375 | 9,8742 | 4,6026 | 306,31 | 7466,19 |
| 97,6 | 9525,76 | 929 714,176 | 9,8793 | 4,6042 | 306,62 | 7481,51 |
| 97,7 | 9545,29 | 932 574,833 | 9,8843 | 4,6057 | 306,93 | 7496,85 |
| 97,8 | 9564,84 | 935 441,352 | 9,8894 | 4,6073 | 307,25 | 7512,21 |
| 97,9 | 9584,41 | 938 313,739 | 9,8944 | 4,6089 | 307,56 | 7527,58 |
| **98,0** | 9604,00 | 941 192,000 | 9,8995 | 4,6104 | 307,88 | 7542,96 |
| 98,1 | 9623,61 | 944 076,141 | 9,9045 | 4,6120 | 308,19 | 7558,37 |
| 98,2 | 9643,24 | 946 966,168 | 9,9096 | 4,6136 | 308,50 | 7573,78 |
| 98,3 | 9662,89 | 949 862,087 | 9,9146 | 4,6151 | 308,82 | 7589,22 |
| 98,4 | 9682,56 | 952 763,904 | 9,9197 | 4,6167 | 309,13 | 7604,66 |
| 98,5 | 9702,25 | 955 671,625 | 9,9247 | 4,6183 | 309,45 | 7620,13 |
| 98,6 | 9721,96 | 958 585,256 | 9,9298 | 4,6198 | 309,76 | 7635,61 |
| 98,7 | 9741,69 | 961 504,803 | 9,9348 | 4,6214 | 310,08 | 7651,11 |
| 98,8 | 9761,44 | 964 430,272 | 9,9398 | 4,6229 | 310,39 | 7666,62 |
| 98,9 | 9781,21 | 967 361,669 | 9,9448 | 4,6245 | 310,70 | 7682,14 |
| **99,0** | 9801,00 | 970 299,000 | 9,9499 | 4,6261 | 311,02 | 7697,69 |
| 99,1 | 9820,81 | 973 242,271 | 9,9549 | 4,6276 | 311,33 | 7713,25 |
| 99,2 | 9840,64 | 976 191,488 | 9,9599 | 4,6292 | 311,65 | 7728,82 |
| 99,3 | 9860,49 | 979 146,657 | 9,9649 | 4,6307 | 311,96 | 7744,41 |
| 99,4 | 9880,36 | 982 107,784 | 9,9700 | 4,6323 | 312,27 | 7760,02 |
| 99,5 | 9900,25 | 985 074,875 | 9,9750 | 4,6338 | 312,59 | 7775,64 |
| 99,6 | 9920,16 | 988 047,936 | 9,9800 | 4,6354 | 312,90 | 7791,28 |
| 99,7 | 9940,09 | 991 026,973 | 9,9850 | 4,6369 | 313,22 | 7806,93 |
| 99,8 | 9960,04 | 994 011,992 | 9,9900 | 4,6385 | 313,53 | 7822,60 |
| 99,9 | 9980,01 | 997 002,999 | 9,9950 | 4,6400 | 313,85 | 7838,28 |
| **100,0** | 10 000,0 | 1 000 000,00 | 10,000 | 4,6416 | 314,16 | 7853,98 |

# 2) Tabelle

der

## Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen 100 bis 1000.

## 100—200

| n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **100** | 10,0000 | 4,6416 | **150** | 12,2474 | 5,3133 |
| 101 | 10,0499 | 4,6570 | 151 | 12,2882 | 5,3251 |
| 102 | 10,0995 | 4,6723 | 152 | 12,3288 | 5,3368 |
| 103 | 10,1489 | 4,6875 | 153 | 12,3693 | 5,3485 |
| 104 | 10,1980 | 4,7027 | 154 | 12,4097 | 5,3601 |
| 105 | 10,2470 | 4,7177 | 155 | 12,4499 | 5,3717 |
| 106 | 10,2956 | 4,7326 | 156 | 12,4900 | 5,3832 |
| 107 | 10,3441 | 4,7475 | 157 | 12,5300 | 5,3947 |
| 108 | 10,3923 | 4,7622 | 158 | 12,5698 | 5,4061 |
| 109 | 10,4403 | 4,7769 | 159 | 12,6095 | 5,4175 |
| **110** | 10,4881 | 4,7914 | **160** | 12,6491 | 5,4288 |
| 111 | 10,5357 | 4,8059 | 161 | 12,6886 | 5,4401 |
| 112 | 10,5830 | 4,8203 | 162 | 12,7279 | 5,4514 |
| 113 | 10,6301 | 4,8346 | 163 | 12,7671 | 5,4626 |
| 114 | 10,6771 | 4,8488 | 164 | 12,8062 | 5,4737 |
| 115 | 10,7238 | 4,8629 | 165 | 12,8452 | 5,4848 |
| 116 | 10,7703 | 4,8770 | 166 | 12,8841 | 5,4959 |
| 117 | 10,8167 | 4,8910 | 167 | 12,9228 | 5,5069 |
| 118 | 10,8628 | 4,9049 | 168 | 12,9615 | 5,5178 |
| 119 | 10,9087 | 4,9187 | 169 | 13,0000 | 5,5288 |
| **120** | 10,9545 | 4,9324 | **170** | 13,0384 | 5,5397 |
| 121 | 11,0000 | 4,9461 | 171 | 13,0767 | 5,5505 |
| 122 | 11,0454 | 4,9597 | 172 | 13,1149 | 5,5613 |
| 123 | 11,0905 | 4,9732 | 173 | 13,1529 | 5,5721 |
| 124 | 11,1355 | 4,9866 | 174 | 13,1909 | 5,5828 |
| 125 | 11,1803 | 5,0000 | 175 | 13,2288 | 5,5934 |
| 126 | 11,2250 | 5,0133 | 176 | 13,2665 | 5,6041 |
| 127 | 11,2694 | 5,0265 | 177 | 13,3041 | 5,6147 |
| 128 | 11,3137 | 5,0397 | 178 | 13,3417 | 5,6252 |
| 129 | 11,3578 | 5,0528 | 179 | 13,3791 | 5,6357 |
| **130** | 11,4018 | 5,0658 | **180** | 13,4164 | 5,6462 |
| 131 | 11,4455 | 5,0788 | 181 | 13,4536 | 5,6567 |
| 132 | 11,4891 | 5,0916 | 182 | 13,4907 | 5,6671 |
| 133 | 11,5326 | 5,1045 | 183 | 13,5277 | 5,6774 |
| 134 | 11,5758 | 5,1172 | 184 | 13,5647 | 5,6877 |
| 135 | 11,6190 | 5,1299 | 185 | 13,6015 | 5,6980 |
| 136 | 11,6619 | 5,1426 | 186 | 13,6382 | 5,7083 |
| 137 | 11,7047 | 5,1551 | 187 | 13,6748 | 5,7185 |
| 138 | 11,7473 | 5,1676 | 188 | 13,7113 | 5,7287 |
| 139 | 11,7898 | 5,1801 | 189 | 13,7477 | 5,7388 |
| **140** | 11,8322 | 5,1925 | **190** | 13,7840 | 5,7489 |
| 141 | 11,8743 | 5,2048 | 191 | 13,8203 | 5,7590 |
| 142 | 11,9164 | 5,2171 | 192 | 13,8564 | 5,7690 |
| 143 | 11,9583 | 5,2293 | 193 | 13,8924 | 5,7790 |
| 144 | 12,0000 | 5,2415 | 194 | 13,9284 | 5,7890 |
| 145 | 12,0416 | 5,2536 | 195 | 13,9642 | 5,7989 |
| 146 | 12,0830 | 5,2656 | 196 | 14,0000 | 5,8088 |
| 147 | 12,1244 | 5,2776 | 197 | 14,0357 | 5,8186 |
| 148 | 12,1655 | 5,2896 | 198 | 14,0712 | 5,8285 |
| 149 | 12,2066 | 5,3015 | 199 | 14,1067 | 5,8383 |
| **150** | 12,2474 | 5,3133 | **200** | 14,1421 | 5,8480 |

## 200—300

| n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **200** | 14,1421 | 5,8480 | **250** | 15,8114 | 6,2996 |
| 201 | 14,1774 | 5,8578 | 251 | 15,8430 | 6,3080 |
| 202 | 14,2127 | 5,8675 | 252 | 15,8745 | 6,3164 |
| 203 | 14,2478 | 5,8771 | 253 | 15,9060 | 6,3247 |
| 204 | 14,2829 | 5,8868 | 254 | 15,9374 | 6,3330 |
| 205 | 14,3178 | 5,8964 | 255 | 15,9687 | 6,3413 |
| 206 | 14,3527 | 5,9059 | 256 | 16,0000 | 6,3496 |
| 207 | 14,3875 | 5,9155 | 257 | 16,0312 | 6,3579 |
| 208 | 14,4222 | 5,9250 | 258 | 16,0624 | 6,3661 |
| 209 | 14,4568 | 5,9345 | 259 | 16,0935 | 6,3743 |
| **210** | 14,4914 | 5,9439 | **260** | 16,1245 | 6,3825 |
| 211 | 14,5258 | 5,9533 | 261 | 16,1555 | 6,3907 |
| 212 | 14,5602 | 5,9627 | 262 | 16,1864 | 6,3988 |
| 213 | 14,4945 | 5,9721 | 263 | 16,2173 | 6,4070 |
| 214 | 14,6287 | 5,9814 | 264 | 16,2481 | 6,4151 |
| 215 | 14,6629 | 5,9907 | 265 | 16,2788 | 6,4232 |
| 216 | 14,6969 | 6,0000 | 266 | 16,3095 | 6,4312 |
| 217 | 14,7308 | 6,0092 | 267 | 16,3401 | 6,4393 |
| 218 | 14,7648 | 6,0185 | 268 | 16,3707 | 6,4473 |
| 219 | 14,7986 | 6,0277 | 269 | 16,4012 | 6,4553 |
| **220** | 14,8324 | 6,0368 | **270** | 16,4317 | 6,4633 |
| 221 | 14,8661 | 6,0459 | 271 | 16,4621 | 6,4713 |
| 222 | 14,8997 | 6,0550 | 272 | 16,4924 | 6,4792 |
| 223 | 14,9332 | 6,0641 | 273 | 16,5227 | 6,4872 |
| 224 | 14,9666 | 6,0732 | 274 | 16,5529 | 6,4951 |
| 225 | 15,0000 | 6,0822 | 275 | 16,5831 | 6,5030 |
| 226 | 15,0333 | 6,0912 | 276 | 16,6132 | 6,5108 |
| 227 | 15,0665 | 6,1002 | 277 | 16,6433 | 6,5187 |
| 228 | 15,0997 | 6,1091 | 278 | 16,6733 | 6,5265 |
| 229 | 15,1327 | 6,1180 | 279 | 16,7033 | 6,5343 |
| **230** | 15,1658 | 6,1269 | **280** | 16,7332 | 6,5421 |
| 231 | 15,1987 | 6,1358 | 281 | 16,7631 | 6,5499 |
| 232 | 15,2315 | 6,1446 | 282 | 16,7929 | 6,5577 |
| 233 | 15,2643 | 6,1534 | 283 | 16,8226 | 6,5654 |
| 234 | 15,2971 | 6,1622 | 284 | 16,8523 | 6,5731 |
| 235 | 15,3297 | 6,1710 | 285 | 16,8819 | 6,5808 |
| 236 | 15,3623 | 6,1797 | 286 | 16,9115 | 6,5885 |
| 237 | 15,3948 | 6,1885 | 287 | 16,9411 | 6,5962 |
| 238 | 15,4272 | 6,1972 | 288 | 16,9706 | 6,6039 |
| 239 | 15,4596 | 6,2058 | 289 | 17,0000 | 6,6115 |
| **240** | 15,4919 | 6,2145 | **290** | 17,0294 | 6,6191 |
| 241 | 15,5242 | 6,2231 | 291 | 17,0587 | 6,6267 |
| 242 | 15,5563 | 6,2317 | 292 | 17,0880 | 6,6343 |
| 243 | 15,5885 | 6,2403 | 293 | 17,1172 | 6,6419 |
| 244 | 15,6205 | 6,2488 | 294 | 17,1464 | 6,6494 |
| 245 | 15,6525 | 6,2573 | 295 | 17,1756 | 6,6569 |
| 246 | 15,6844 | 6,2658 | 296 | 17,2047 | 6,6644 |
| 247 | 15,7162 | 6,2743 | 297 | 17,2337 | 6,6719 |
| 248 | 15,7480 | 6,2828 | 298 | 17,2627 | 6,6794 |
| 249 | 15,7797 | 6,2912 | 299 | 17,2916 | 6,6869 |
| **250** | 15,8114 | 6,2996 | **300** | 17,3205 | 6,6943 |

## 300—400

| n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **300** | 17,3205 | 6,6943 | **350** | 18,7083 | 7,0473 |
| 301 | 17,3494 | 6,7018 | 351 | 18,7350 | 7,0540 |
| 302 | 17,3781 | 6,7092 | 352 | 18,7617 | 7,0607 |
| 303 | 17,4069 | 6,7166 | 353 | 18,7883 | 7,0674 |
| 304 | 17,4356 | 6,7240 | 354 | 18,8149 | 7,0740 |
| 305 | 17,4642 | 6,7313 | 355 | 18,8414 | 7,0807 |
| 306 | 17,4929 | 6,7387 | 356 | 18,8680 | 7,0873 |
| 307 | 17,5214 | 6,7460 | 357 | 18,8944 | 7,0940 |
| 308 | 17,5499 | 6,7533 | 358 | 18,9209 | 7,1006 |
| 309 | 17,5784 | 6,7606 | 359 | 18,9473 | 7,1072 |
| **310** | 17,6068 | 6,7679 | **360** | 18,9737 | 7,1138 |
| 311 | 17,6352 | 6,7752 | 361 | 19,0000 | 7,1204 |
| 312 | 17,6635 | 6,7824 | 362 | 19,0263 | 7,1269 |
| 313 | 17,6918 | 6,7897 | 363 | 19,0526 | 7,1335 |
| 314 | 17,7200 | 6,7969 | 364 | 19,0788 | 7,1400 |
| 315 | 17,7482 | 6,8041 | 365 | 19,1050 | 7,1466 |
| 316 | 17,7764 | 6,8113 | 366 | 19,1311 | 7,1531 |
| 317 | 17,8045 | 6,8185 | 367 | 19,1572 | 7,1596 |
| 318 | 17,8326 | 6,8256 | 368 | 19,1833 | 7,1661 |
| 319 | 17,8606 | 6,8328 | 369 | 19,2094 | 7,1726 |
| **320** | 17,8885 | 6,8399 | **370** | 19,2354 | 7,1791 |
| 321 | 17,9165 | 6,8470 | 371 | 19,2614 | 7,1855 |
| 322 | 17,9444 | 6,8541 | 372 | 19,2873 | 7,1920 |
| 323 | 17,9722 | 6,8612 | 373 | 19,3132 | 7,1984 |
| 324 | 18,0000 | 6,8683 | 374 | 19,3391 | 7,2048 |
| 325 | 18,0278 | 6,8753 | 375 | 19,3649 | 7,2112 |
| 326 | 18,0555 | 6,8824 | 376 | 19,3907 | 7,2177 |
| 327 | 18,0831 | 6,8894 | 377 | 19,4165 | 7,2240 |
| 328 | 18,1108 | 6,8964 | 378 | 19,4422 | 7,2304 |
| 329 | 18,1384 | 6,9034 | 379 | 19,4679 | 7,2368 |
| **330** | 18,1659 | 6,9104 | **380** | 19,4936 | 7,2432 |
| 331 | 18,1934 | 6,9174 | 381 | 19,5192 | 7,2495 |
| 332 | 18,2209 | 6,9244 | 382 | 19,5448 | 7,2558 |
| 333 | 18,2483 | 6,9313 | 383 | 19,5704 | 7,2622 |
| 334 | 18,2757 | 6,9382 | 384 | 19,5959 | 7,2685 |
| 335 | 18,3030 | 6,9451 | 385 | 19,6214 | 7,2748 |
| 336 | 18,3303 | 6,9521 | 386 | 19,6469 | 7,2811 |
| 337 | 18,3576 | 6,9589 | 387 | 19,6723 | 7,2874 |
| 338 | 18,3848 | 6,9658 | 388 | 19,6977 | 7,2936 |
| 339 | 18,4120 | 6,9727 | 389 | 19,7231 | 7,2999 |
| **340** | 18,4391 | 6,9795 | **390** | 19,7484 | 7,3061 |
| 341 | 18,4662 | 6,9864 | 391 | 19,7737 | 7,3124 |
| 342 | 18,4932 | 6,9932 | 392 | 19,7990 | 7,3186 |
| 343 | 18,5203 | 7,0000 | 393 | 19,8242 | 7,3248 |
| 344 | 18,5472 | 7,0068 | 394 | 19,8494 | 7,3310 |
| 345 | 18,5742 | 7,0136 | 395 | 19,8746 | 7,3372 |
| 346 | 18,6011 | 7,0203 | 396 | 19,8997 | 7,3434 |
| 347 | 18,6279 | 7,0271 | 397 | 19,9249 | 7,3496 |
| 348 | 18,6548 | 7,0338 | 398 | 19,9499 | 7,3558 |
| 349 | 18,6815 | 7,0406 | 399 | 19,9750 | 7,3619 |
| **350** | 18,7083 | 7,0473 | **400** | 20,0000 | 7,3681 |

400—500

| n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **400** | 20,0000 | 7,3681 | **450** | 21,2132 | 7,6631 |
| 401 | 20,0250 | 7,3742 | 451 | 21,2368 | 7,6688 |
| 402 | 20,0499 | 7,3803 | 452 | 21,2603 | 7,6744 |
| 403 | 20,0749 | 7,3864 | 453 | 21,2838 | 7,6801 |
| 404 | 20,0998 | 7,3925 | 454 | 21,3073 | 7,6857 |
| 405 | 20,1246 | 7,3986 | 455 | 21,3307 | 7,6914 |
| 406 | 20,1494 | 7,4047 | 456 | 21,3542 | 7,6970 |
| 407 | 20,1742 | 7,4108 | 457 | 21,3776 | 7,7026 |
| 408 | 20,1990 | 7,4169 | 458 | 21,4009 | 7,7082 |
| 409 | 20,2237 | 7,4229 | 459 | 21,4243 | 7,7138 |
| **410** | 20,2485 | 7,4290 | **460** | 21,4476 | 7,7194 |
| 411 | 20,2731 | 7,4350 | 461 | 21,4709 | 7,7250 |
| 412 | 20,2978 | 7,4410 | 462 | 21,4942 | 7,7306 |
| 413 | 20,3224 | 7,4470 | 463 | 21,5174 | 7,7362 |
| 414 | 20,3470 | 7,4530 | 464 | 21,5407 | 7,7418 |
| 415 | 20,3715 | 7,4590 | 465 | 21,5639 | 7,7473 |
| 416 | 20,3961 | 7,4650 | 466 | 21,5870 | 7,7529 |
| 417 | 20,4206 | 7,4710 | 467 | 21,6102 | 7,7584 |
| 418 | 20,4450 | 7,4770 | 468 | 21,6333 | 7,7639 |
| 419 | 20,4695 | 7,4829 | 469 | 21,6564 | 7,7695 |
| **420** | 20,4939 | 7,4889 | **470** | 21,6795 | 7,7750 |
| 421 | 20,5183 | 7,4948 | 471 | 21,7025 | 7,7805 |
| 422 | 20,5426 | 7,5007 | 472 | 21,7256 | 7,7860 |
| 423 | 20,5670 | 7,5067 | 473 | 21,7486 | 7,7915 |
| 424 | 20,5913 | 7,5126 | 474 | 21,7715 | 7,7970 |
| 425 | 20,6155 | 7,5185 | 475 | 21,7945 | 7,8025 |
| 426 | 20,6398 | 7,5244 | 476 | 21,8174 | 7,8079 |
| 427 | 20,6640 | 7,5302 | 477 | 21,8403 | 7,8134 |
| 428 | 20,6882 | 7,5361 | 478 | 21,8632 | 7,8188 |
| 429 | 20,7123 | 7,5420 | 479 | 21,8861 | 7,8243 |
| **430** | 20,7364 | 7,5478 | **480** | 21,9089 | 7,8297 |
| 431 | 20,7605 | 7,5537 | 481 | 21,9317 | 7,8352 |
| 432 | 20,7846 | 7,5595 | 482 | 21,9545 | 7,8406 |
| 433 | 20,8087 | 7,5654 | 483 | 21,9773 | 7,8460 |
| 434 | 20,8327 | 7,5712 | 484 | 22,0000 | 7,8514 |
| 435 | 20,8567 | 7,5770 | 485 | 22,0227 | 7,8568 |
| 436 | 20,8806 | 7,5828 | 486 | 22,0454 | 7,8622 |
| 437 | 20,9045 | 7,5886 | 487 | 22,0681 | 7,8676 |
| 438 | 20,9284 | 7,5944 | 488 | 22,0907 | 7,8730 |
| 439 | 20,9523 | 7,6001 | 489 | 22,1133 | 7,8784 |
| **440** | 20,9762 | 7,6059 | **490** | 22,1359 | 7,8837 |
| 441 | 21,0000 | 7,6117 | 491 | 22,1585 | 7,8891 |
| 442 | 21,0238 | 7,6174 | 492 | 22,1811 | 7,8944 |
| 443 | 21,0476 | 7,6232 | 493 | 22,2036 | 7,8998 |
| 444 | 21,0713 | 7,6289 | 494 | 22,2261 | 7,9051 |
| 445 | 21,0950 | 7,6346 | 495 | 22,2486 | 7,9105 |
| 446 | 21,1187 | 7,6403 | 496 | 22,2711 | 7,9158 |
| 447 | 21,1424 | 7,6460 | 497 | 22,2935 | 7,9211 |
| 448 | 21,1660 | 7,6517 | 498 | 22,3159 | 7,9264 |
| 449 | 21,1896 | 7,6574 | 499 | 22,3383 | 7,9317 |
| **450** | 21,2132 | 7,6631 | **500** | 22,3607 | 7,9370 |

## 500—600

| n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **500** | 22,3607 | 7,9370 | **550** | 23,4521 | 8,1932 |
| 501 | 22,3830 | 7,9423 | 551 | 23,4734 | 8,1982 |
| 502 | 22,4054 | 7,9476 | 552 | 23,4947 | 8,2031 |
| 503 | 22,4277 | 7,9528 | 553 | 23,5160 | 8,2081 |
| 504 | 22,4499 | 7,9581 | 554 | 23,5372 | 8,2130 |
| 505 | 22,4722 | 7,9634 | 555 | 23,5584 | 8,2180 |
| 506 | 22,4944 | 7,9686 | 556 | 23,5797 | 8,2229 |
| 507 | 22,5167 | 7,9739 | 557 | 23,6008 | 8,2278 |
| 508 | 22,5389 | 7,9791 | 558 | 23,6220 | 8,2327 |
| 509 | 22,5610 | 7,9843 | 559 | 23,6432 | 8,2377 |
| **510** | 22,5832 | 7,9896 | **560** | 23,6643 | 8,2426 |
| 511 | 22,6053 | 7,9948 | 561 | 23,6854 | 8,2475 |
| 512 | 22,6274 | 8,0000 | 562 | 23,7065 | 8,2524 |
| 513 | 22,6495 | 8,0052 | 563 | 23,7276 | 8,2573 |
| 514 | 22,6716 | 8,0104 | 564 | 23,7487 | 8,2621 |
| 515 | 22,6936 | 8,0156 | 565 | 23,7697 | 8,2670 |
| 516 | 22,7156 | 8,0208 | 566 | 23,7908 | 8,2719 |
| 517 | 22,7376 | 8,0260 | 567 | 23,8118 | 8,2768 |
| 518 | 22,7596 | 8,0311 | 568 | 23,8328 | 8,2816 |
| 519 | 22,7816 | 8,0363 | 569 | 23,8537 | 8,2865 |
| **520** | 22,8035 | 8,0415 | **570** | 23,8747 | 8,2913 |
| 521 | 22,8254 | 8,0466 | 571 | 23,8956 | 8,2962 |
| 522 | 22,8473 | 8,0517 | 572 | 23,9165 | 8,3010 |
| 523 | 22,8692 | 8,0569 | 573 | 23,9374 | 8,3059 |
| 524 | 22,8910 | 8,0620 | 574 | 23,9583 | 8,3107 |
| 525 | 22,9129 | 8,0671 | 575 | 23,9792 | 8,3155 |
| 526 | 22,9347 | 8,0723 | 576 | 24,0000 | 8,3203 |
| 527 | 22,9565 | 8,0774 | 577 | 24,0208 | 8,3251 |
| 528 | 22,9783 | 8,0825 | 578 | 24,0416 | 8,3300 |
| 529 | 23,0000 | 8,0876 | 579 | 24,0624 | 8,3348 |
| **530** | 23,0217 | 8,0927 | **580** | 24,0832 | 8,3396 |
| 531 | 23,0434 | 8,0978 | 581 | 24,1039 | 8,3443 |
| 532 | 23,0651 | 8,1028 | 582 | 24,1247 | 8,3491 |
| 533 | 23,0868 | 8,1079 | 583 | 24,1454 | 8,3539 |
| 534 | 23,1084 | 8,1130 | 584 | 24,1661 | 8,3587 |
| 535 | 23,1301 | 8,1180 | 585 | 24,1868 | 8,3634 |
| 536 | 23,1517 | 8,1231 | 586 | 24,2074 | 8,3682 |
| 537 | 23,1733 | 8,1281 | 587 | 24,2281 | 8,3730 |
| 538 | 23,1948 | 8,1332 | 588 | 24,2487 | 8,3777 |
| 539 | 23,2164 | 8,1382 | 589 | 24,2693 | 8,3825 |
| **540** | 23,2379 | 8,1433 | **590** | 24,2899 | 8,3872 |
| 541 | 23,2594 | 8,1483 | 591 | 24,3105 | 8,3919 |
| 542 | 23,2809 | 8,1533 | 592 | 24,3311 | 8,3967 |
| 543 | 23,3024 | 8,1583 | 593 | 24,3516 | 8,4014 |
| 544 | 23,3228 | 8,1633 | 594 | 24,3721 | 8,4061 |
| 545 | 23,3452 | 8,1683 | 595 | 24,3926 | 8,4108 |
| 546 | 23,3666 | 8,1733 | 596 | 24,4131 | 8,4155 |
| 547 | 23,3880 | 8,1783 | 597 | 24,4336 | 8,4202 |
| 548 | 23,4094 | 8,1833 | 598 | 24,4540 | 8,4249 |
| 549 | 23,4307 | 8,1882 | 599 | 24,4745 | 8,4396 |
| **550** | 23,4521 | 8,1932 | **600** | 24,4949 | 8,4343 |

## 600—700

| n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **600** | 24,4949 | 8,4343 | **650** | 25,4951 | 8,6624 |
| 601 | 24,5153 | 8,4390 | 651 | 25,5147 | 8,6668 |
| 602 | 24,5357 | 8,4437 | 652 | 25,5343 | 8,6713 |
| 603 | 24,5561 | 8,4484 | 653 | 25,5539 | 8,6757 |
| 604 | 24,5764 | 8,4530 | 654 | 25,5734 | 8,6801 |
| 605 | 24,5967 | 8,4577 | 655 | 25,5930 | 8,6845 |
| 606 | 24,6171 | 8,4623 | 656 | 25,6125 | 8,6890 |
| 607 | 24,6374 | 8,4670 | 657 | 25,6320 | 8,6934 |
| 608 | 24,6577 | 8,4716 | 658 | 25,6515 | 8,6978 |
| 609 | 24,6779 | 8,4763 | 659 | 25,6710 | 8,7022 |
| **610** | 24,6982 | 8,4809 | **660** | 25,6905 | 8,7066 |
| 611 | 24,7184 | 8,4856 | 661 | 25,7099 | 8,7110 |
| 612 | 24,7386 | 8,4902 | 662 | 25,7294 | 8,7154 |
| 613 | 24,7588 | 8,4948 | 663 | 25,7488 | 8,7198 |
| 614 | 24,7790 | 8,4994 | 664 | 25,7682 | 8,7241 |
| 615 | 24,7992 | 8,5040 | 665 | 25,7876 | 8,7285 |
| 616 | 24,8193 | 8,5086 | 666 | 25,8070 | 8,7329 |
| 617 | 24,8395 | 8,5132 | 667 | 25,8263 | 8,7373 |
| 618 | 24,8596 | 8,5178 | 668 | 25,8457 | 8,7416 |
| 619 | 24,8797 | 8,5224 | 669 | 25,8650 | 8,7460 |
| **620** | 24,8998 | 8,5270 | **670** | 25,8844 | 8,7503 |
| 621 | 24,9199 | 8,5316 | 671 | 25,9037 | 8,7547 |
| 622 | 24,9399 | 8,5362 | 672 | 25,9230 | 8,7590 |
| 623 | 24,9600 | 8,5408 | 673 | 25,9422 | 8,7634 |
| 624 | 24,9800 | 8,5453 | 674 | 25,9615 | 8,7677 |
| 625 | 25,0000 | 8,5499 | 675 | 25,9808 | 8,7721 |
| 626 | 25,0200 | 8,5544 | 676 | 26,0000 | 8,7764 |
| 627 | 25,0400 | 8,5590 | 677 | 26,0192 | 8,7807 |
| 628 | 25,0599 | 8,5635 | 678 | 26,0384 | 8,7850 |
| 629 | 25,0799 | 8,5681 | 679 | 26,0576 | 8,7893 |
| **630** | 25,0998 | 8,5726 | **680** | 26,0768 | 8,7937 |
| 631 | 25,1197 | 8,5772 | 681 | 26,0960 | 8,7980 |
| 632 | 25,1396 | 8,5817 | 682 | 26,1151 | 8,8023 |
| 633 | 25,1595 | 8,5862 | 683 | 26,1343 | 8,8066 |
| 634 | 25,1794 | 8,5907 | 684 | 26,1534 | 8,8109 |
| 635 | 25,1992 | 8,5952 | 685 | 26,1725 | 8,8152 |
| 636 | 25,2190 | 8,5997 | 686 | 26,1916 | 8,8194 |
| 637 | 25,2389 | 8,6043 | 687 | 26,2107 | 8,8237 |
| 638 | 25,2587 | 8,6088 | 688 | 26,2298 | 8,8280 |
| 639 | 25,2784 | 8,6132 | 689 | 26,2488 | 8,8323 |
| **640** | 25,2982 | 8,6177 | **690** | 26,2679 | 8,8366 |
| 641 | 25,3180 | 8,6222 | 691 | 26,2869 | 8,8408 |
| 642 | 25,3377 | 8,6267 | 692 | 26,3059 | 8,8451 |
| 643 | 25,3574 | 8,6312 | 693 | 26,3249 | 8,8493 |
| 644 | 25,3772 | 8,6357 | 694 | 26,3439 | 8,8536 |
| 645 | 25,3969 | 8,6401 | 695 | 26,3629 | 8,8578 |
| 646 | 25,4165 | 8,6446 | 696 | 26,3818 | 8,8621 |
| 647 | 25,4362 | 8,6490 | 697 | 26,4008 | 8,8663 |
| 648 | 25,4558 | 8,6535 | 698 | 26,4197 | 8,8706 |
| 649 | 25,4755 | 8,6579 | 699 | 26,4386 | 8,8748 |
| **650** | 25,4951 | 8,6624 | **700** | 26,4575 | 8,8790 |

## 700—800

| n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **700** | 26,4575 | 8,8790 | **750** | 27,3861 | 9,0856 |
| 701 | 26,4764 | 8,8833 | 751 | 27,4044 | 9,0896 |
| 702 | 26,4953 | 8,8875 | 752 | 27,4226 | 9,0937 |
| 703 | 26,5141 | 8,8917 | 753 | 27,4408 | 9,0977 |
| 704 | 26,5330 | 8,8959 | 754 | 27,4591 | 9,1017 |
| 705 | 26,5518 | 8,9001 | 755 | 27,4773 | 9,1057 |
| 706 | 26,5707 | 8,9043 | 756 | 27,4955 | 9,1098 |
| 707 | 26,5895 | 8,9085 | 757 | 27,5136 | 9,1138 |
| 708 | 26,6083 | 8,9127 | 758 | 27,5318 | 9,1178 |
| 709 | 26,6271 | 8,9169 | 759 | 27,5500 | 9,1218 |
| **710** | 26,6458 | 8,9211 | **760** | 27,5681 | 9,1258 |
| 711 | 26,6646 | 8,9253 | 761 | 27,5862 | 9,1298 |
| 712 | 26,6833 | 8,9295 | 762 | 27,6043 | 9,1338 |
| 713 | 26,7021 | 8,9337 | 763 | 27,6225 | 9,1378 |
| 714 | 26,7208 | 8,9378 | 764 | 27,6405 | 9,1418 |
| 715 | 26,7395 | 8,9420 | 765 | 27,6586 | 9,1458 |
| 716 | 26,7582 | 8,9462 | 766 | 27,6767 | 9,1498 |
| 717 | 26,7769 | 8,9503 | 767 | 27,6948 | 9,1537 |
| 718 | 26,7955 | 8,9545 | 768 | 27,7128 | 9,1577 |
| 719 | 26,8142 | 8,9587 | 769 | 27,7308 | 9,1617 |
| **720** | 26,8328 | 8,9628 | **770** | 27,7489 | 9,1657 |
| 721 | 26,8514 | 8,9670 | 771 | 27,7669 | 9,1696 |
| 722 | 26,8701 | 8,9711 | 772 | 27,7849 | 9,1736 |
| 723 | 26,8887 | 8,9752 | 773 | 27,8029 | 9,1775 |
| 724 | 26,9072 | 8,9794 | 774 | 27,8209 | 9,1815 |
| 725 | 26,9258 | 8,9835 | 775 | 27,8388 | 9,1855 |
| 726 | 26,9444 | 8,9876 | 776 | 27,8568 | 9,1894 |
| 727 | 26,9629 | 8,9918 | 777 | 27,8747 | 9,1933 |
| 728 | 26,9815 | 8,9959 | 778 | 27,8927 | 9,1973 |
| 729 | 27,0000 | 9,0000 | 779 | 27,9106 | 9,2012 |
| **730** | 27,0185 | 9,0041 | **780** | 27,9285 | 9,2052 |
| 731 | 27,0370 | 9,0082 | 781 | 27,9464 | 9,2091 |
| 732 | 27,0555 | 9,0123 | 782 | 27,9643 | 9,2130 |
| 733 | 27,0740 | 9,0164 | 783 | 27,9821 | 9,2170 |
| 734 | 27,0924 | 9,0205 | 784 | 28,0000 | 9,2209 |
| 735 | 27,1109 | 9,0246 | 785 | 28,0179 | 9,2248 |
| 736 | 27,1293 | 9,0287 | 786 | 28,0357 | 9,2287 |
| 737 | 27,1477 | 9,0328 | 787 | 28,0535 | 9,2326 |
| 738 | 27,1662 | 9,0369 | 788 | 28,0713 | 9,2365 |
| 739 | 27,1846 | 9,0410 | 789 | 28,0891 | 9,2404 |
| **740** | 27,2029 | 9,0450 | **790** | 28,1069 | 9,2443 |
| 741 | 27,2213 | 9,0491 | 791 | 28,1247 | 9,2482 |
| 742 | 27,2397 | 9,0532 | 792 | 28,1425 | 9,2521 |
| 743 | 27,2580 | 9,0572 | 793 | 28,1603 | 9,2560 |
| 744 | 27,2764 | 9,0613 | 794 | 28,1780 | 9,2599 |
| 745 | 27,2947 | 9,0654 | 795 | 28,1957 | 9,2638 |
| 746 | 27,3130 | 9,0694 | 796 | 28,2135 | 9,2677 |
| 747 | 27,3313 | 9,0735 | 797 | 28,2312 | 9,2716 |
| 748 | 27,3496 | 9,0775 | 798 | 28,2489 | 9,2754 |
| 749 | 27,3679 | 9,0816 | 799 | 28,2666 | 9,2793 |
| **750** | 27,3861 | 9,0856 | **800** | 28,2843 | 9,2832 |

800—900

| n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **800** | 28,2843 | 9,2832 | **850** | 29,1548 | 9,4727 |
| 801 | 28,3019 | 9,2870 | 851 | 29,1719 | 9,4764 |
| 802 | 28,3196 | 9,2909 | 852 | 29,1890 | 9,4801 |
| 803 | 28,3373 | 9,2948 | 853 | 29,2062 | 9,4838 |
| 804 | 28,3549 | 9,2968 | 854 | 29,2233 | 9,4875 |
| 805 | 28,3725 | 9,3025 | 855 | 29,2404 | 9,4912 |
| 806 | 28,3901 | 9,3063 | 856 | 29,2575 | 9,4949 |
| 807 | 28,4077 | 9,3102 | 857 | 29,2746 | 9,4986 |
| 808 | 28,4253 | 9,3140 | 858 | 29,2916 | 9,5023 |
| 809 | 28,4429 | 9,3179 | 859 | 29,3087 | 9,5060 |
| **810** | 28,4605 | 9,3217 | **860** | 29,3258 | 9,5097 |
| 811 | 28,4781 | 9,3255 | 861 | 29,3428 | 9,5134 |
| 812 | 28,4956 | 9,3294 | 862 | 29,3598 | 9,5171 |
| 813 | 28,5132 | 9,3332 | 863 | 29,3769 | 9,5207 |
| 814 | 28,5307 | 9,3370 | 864 | 29,3939 | 9,5244 |
| 815 | 28,5482 | 9,3408 | 865 | 29,4109 | 9,5281 |
| 816 | 28,5657 | 9,3447 | 866 | 29,4279 | 9,5317 |
| 817 | 28,5832 | 9,3485 | 867 | 29,4449 | 9,5354 |
| 818 | 28,6001 | 9,3523 | 868 | 29,4618 | 9,5391 |
| 819 | 28,6182 | 9,3561 | 869 | 29,4788 | 9,5427 |
| **820** | 28,6356 | 9,3599 | **870** | 29,4958 | 9,5464 |
| 821 | 28,6531 | 9,3637 | 871 | 29,5127 | 9,5501 |
| 822 | 28,6705 | 9,3675 | 872 | 29,5296 | 9,5537 |
| 823 | 28,6880 | 9,3713 | 873 | 29,5466 | 9,5574 |
| 824 | 28,7054 | 9,3751 | 874 | 29,5635 | 9,5610 |
| 825 | 28,7228 | 9,3789 | 875 | 29,5804 | 9,5647 |
| 826 | 28,7402 | 9,3827 | 876 | 29,5973 | 9,5683 |
| 827 | 28,7576 | 9,3865 | 877 | 29,6142 | 9,5719 |
| 828 | 28,7750 | 9,3902 | 878 | 29,6311 | 9,5756 |
| 829 | 28,7924 | 9,3940 | 879 | 29,6479 | 9,5792 |
| **830** | 28,8097 | 9,3978 | **880** | 29,6648 | 9,5828 |
| 831 | 28,8271 | 9,4016 | 881 | 29,6816 | 9,5865 |
| 832 | 28,8444 | 9,4053 | 882 | 29,6985 | 9,5901 |
| 833 | 28,8617 | 9,4091 | 883 | 29,7153 | 9,5937 |
| 834 | 28,8791 | 9,4129 | 884 | 29,7321 | 9,5973 |
| 835 | 28,8964 | 9,4166 | 885 | 29,7489 | 9,6010 |
| 836 | 28,9137 | 9,4204 | 886 | 29,7658 | 9,6046 |
| 837 | 28,9310 | 9,4241 | 887 | 29,7825 | 9,6082 |
| 838 | 28,9482 | 9,4279 | 888 | 29,7993 | 9,6118 |
| 839 | 28,9655 | 9,4316 | 889 | 29,8161 | 9,6154 |
| **840** | 28,9828 | 9,4354 | **890** | 29,8329 | 9,6190 |
| 841 | 29,0000 | 9,4391 | 891 | 29,8496 | 9,6226 |
| 842 | 29,0172 | 9,4429 | 892 | 29,8664 | 9,6262 |
| 843 | 29,0345 | 9,4466 | 893 | 29,8831 | 9,6298 |
| 844 | 29,0517 | 9,4503 | 894 | 29,8998 | 9,6334 |
| 845 | 29,0689 | 9,4541 | 895 | 29,9166 | 9,6370 |
| 846 | 29,0861 | 9,4578 | 896 | 29,9333 | 9,6406 |
| 847 | 29,1033 | 9,4615 | 897 | 29,9500 | 9,6442 |
| 848 | 29,1204 | 9,4652 | 898 | 29,9666 | 9,6477 |
| 849 | 29,1376 | 9,4690 | 899 | 29,9833 | 9,6513 |
| **850** | 29,1548 | 9,4727 | **900** | 30,0000 | 9,6549 |

900—1000

| n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | n | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **900** | 30,0000 | 9,6549 | **950** | 30,8221 | 9,8305 |
| 901 | 30,0167 | 9,6585 | 951 | 30,8383 | 9,8339 |
| 902 | 30,0333 | 9,6620 | 952 | 30,8545 | 9,8374 |
| 903 | 30,0500 | 9,6656 | 953 | 30,8707 | 9,8408 |
| 904 | 30,0666 | 9,6692 | 954 | 30,8869 | 9,8443 |
| 905 | 30,0832 | 9,6727 | 955 | 30,9031 | 9,8477 |
| 906 | 30,0998 | 9,6763 | 956 | 30,9192 | 9,8511 |
| 907 | 30,1164 | 9,6799 | 957 | 30,9354 | 9,8546 |
| 908 | 30,1330 | 9,6834 | 958 | 30,9516 | 9,8580 |
| 909 | 30,1496 | 9,6870 | 959 | 30,9677 | 9,8614 |
| **910** | 30,1662 | 9,6905 | **960** | 30,9839 | 9,8648 |
| 911 | 30,1828 | 9,6941 | 961 | 31,0000 | 9,8683 |
| 912 | 30,1993 | 9,6976 | 962 | 31,0161 | 9,8717 |
| 913 | 30,2159 | 9,7012 | 963 | 31,0322 | 9,8751 |
| 914 | 30,2324 | 9,7047 | 964 | 31,0483 | 9,8785 |
| 915 | 30,2490 | 9,7082 | 965 | 31,0644 | 9,8819 |
| 916 | 30,2655 | 9,7118 | 966 | 31,0805 | 9,8854 |
| 917 | 30,2820 | 9,7153 | 967 | 31,0966 | 9,8888 |
| 918 | 30,2985 | 9,7188 | 968 | 31,1127 | 9,8922 |
| 919 | 30,3150 | 9,7224 | 969 | 31,1288 | 9,8956 |
| **920** | 30,3315 | 9,7259 | **970** | 31,1448 | 9,8990 |
| 921 | 30,3480 | 9,7294 | 971 | 31,1609 | 9,9024 |
| 922 | 30,3645 | 9,7329 | 972 | 31,1769 | 9,9058 |
| 923 | 30,3809 | 9,7364 | 973 | 31,1929 | 9,9092 |
| 924 | 30,3974 | 9,7400 | 974 | 31,2090 | 9,9126 |
| 925 | 30,4138 | 9,7435 | 975 | 31,2250 | 9,9160 |
| 926 | 30,4302 | 9,7470 | 976 | 31,2410 | 9,9194 |
| 927 | 30,4467 | 9,7505 | 977 | 31,2570 | 9,9227 |
| 928 | 30,4631 | 9,7540 | 978 | 31,2730 | 9,9261 |
| 929 | 30,4795 | 9,7575 | 979 | 31,2890 | 9,9295 |
| **930** | 30,4959 | 9,7610 | **980** | 31,3050 | 9,9329 |
| 931 | 30,5123 | 9,7645 | 981 | 31,3209 | 9,9363 |
| 932 | 30,5287 | 9,7680 | 982 | 31,3369 | 9,9396 |
| 933 | 30,5450 | 9,7715 | 983 | 31,3528 | 9,9430 |
| 934 | 30,5614 | 9,7750 | 984 | 31,3688 | 9,9464 |
| 935 | 30,5778 | 9,7785 | 985 | 31,3847 | 9,9497 |
| 936 | 30,5941 | 9,7819 | 986 | 31,4006 | 9,9531 |
| 937 | 30,6105 | 9,7854 | 987 | 31,4166 | 9,9565 |
| 938 | 30,6268 | 9,7889 | 988 | 31,4325 | 9,9598 |
| 939 | 30,6431 | 9,7924 | 989 | 31,4484 | 9,9632 |
| **940** | 30,6594 | 9,7959 | **990** | 31,4643 | 9,9666 |
| 941 | 30,6757 | 9,7993 | 991 | 31,4802 | 9,9699 |
| 942 | 30,6920 | 9,8028 | 992 | 31,4960 | 9,9733 |
| 943 | 30,7083 | 9,8063 | 993 | 31,5119 | 9,9766 |
| 944 | 30,7246 | 9,8097 | 994 | 31,5278 | 9,9800 |
| 945 | 30,7409 | 9,8132 | 995 | 31,5436 | 9,9833 |
| 946 | 30,7571 | 9,8167 | 996 | 31,5595 | 9,9866 |
| 947 | 30,7734 | 9,8201 | 997 | 31,5753 | 9,9900 |
| 948 | 30,7896 | 9,8236 | 998 | 31,5911 | 9,9933 |
| 949 | 30,8058 | 9,8270 | 999 | 31,6070 | 9,9967 |
| **950** | 30,8221 | 9,8305 | **1000** | 31,6228 | 10,0000 |

Erster Teil: Material und Konstruktionselemente. 2. Auflage. Mit 196 Abbildungen im Text. Preis geheftet 2 M. 40 Pf. In Leinwand gebunden 3 Mark.

Zweiter Teil: Anwendung und Ausführung der Konstruktionen. 2. Auflage. Mit 359 Abbildungen im Text. Preis geheftet 3 Mark. In Leinwand gebunden 4 M. 60 Pf.

**Lew,** Dr. Ignatz, **Die Feuerungen mit flüssigen Brennmaterialien.** Mit Abbildungen im Text und 7 lithogr. Tafeln. Preis kartoniert 5 Mark.

**Lohren,** A., **Die Kämm-Maschinen** nebst **Hechel-** und **Dressing-Maschinen.** Erster Teil: Die Kämm-Maschinen für Wolle, Baumwolle, Flachs und Seide. Mit Atlas, Tafel I—X enthaltend. Preis geh. 15 M.

Zweiter Teil: Die Kämm-Maschinen für Wolle, Baumwolle, Flachs und Seide. Mit Atlas, Tafel XI—XXII enth. Preis geh. 20 Mark.

Dritter Teil: Die Hechel- und Dressing-Maschinen. Mit Atlas, Tafel XXIII—XXXVII enthaltend. Preis geheftet 20 Mark.

**Mayer,** Robert, **Die Mechanik der Wärme** in gesammelten Schriften. Dritte ergänzte und mit historisch-litterarischen Mitteilungen versehene Auflage. Herausg. von Dr. Jacob J. Weyrauch. Mit Porträt. Preis geh. 10 M.

—„— **Kleinere Schriften und Briefe.** Nebst Mitteilungen aus seinem Leben. Herausgegeben von Dr. Jacob J. Weyrauch. Mit 2 Abbildungen und Porträt. Preis geheftet 10 Mark.

**Mühlhäuser,** Dr. Otto, **Die Technik der Rosanilinfarbstoffe,** entwicklungsgeschichtlich dargestellt und für Praxis und Wissenschaft bearbeitet. Mit 10 lithographierten Tafeln. In Leinwand gebunden 6 Mark.

**Nördlinger,** Dr. H., **Querschnitte von hundert Holzarten.** Zur Belehrung für Forstleute, Landwirte, Botaniker und Holztechnologen. 11 Bände, jeder Band hundert, teils europäische, teils ausländische Holzarten enthaltend. Jeder Band mit beschreibendem Text, in Karton. Preis je 14 Mark.

**Pregél,** Th. „Neuere Werkzeugmaschinen für die Metallbearbeitung." **Fräse- und Schleifmaschinen.** Ein Handbuch für Maschinenbauer, Gewerbtreibende, Techniker u. Studierende. Mit 520 Abbild. im Text. Preis geh. 6 M.

—„— **Drehbänke,** sowie Maschinen zum Drehen, Bohren und Gewindeschneiden. Ein Handbuch für Maschinenbauer, Gewerbtreibende, Techniker und Studierende. Mit 820 Abbildungen im Text. Preis geh. 10 M.

**Reinert,** E., **Die modernen Dampfkesselanlagen.** Deren Einrichtung und Betrieb. Ein Hand- und Nachschlagebuch für Industrielle, Studierende und Ingenieure. Mit 150 Abbildungen im Text. Preis geheftet 6 Mark. In Leinwand gebunden 8 Mark.

**Sauerbeck,** Dr. P., **Lehrbuch der Stereometrie** nebst zahlreichen Uebungen und einem Abschnitt über Krystallographie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie für den Selbstunterricht bearbeitet. Mit 222 Abbildungen im Text.

Preis geheftet 5 M. 40 Pf. In Leinwand gebunden 6 Mark.

**Schinz,** C., **Studien üb. d. Hohofen** z. Darstellung v. Roheisen. Preis geh. 1 M. 80 Pf.

**Seelig,** Dr. Eduard, **Organische Reaktionen und Reagentien.** Preis geh. 15 M.

**Soxhlet,** V. H., **Die Färberei der Baumwolle** mit direkt färbenden Farbstoffen. Ein praktisches Handbuch für Färber, Koloristen, Techniker und Chemiker. Mit 150 gefärbten Baumwollproben und 30 Abbildungen. Preis geb. 15 M.